

Cours de Maths Spécialité

Enzo Rodriguez

March 23, 2025

Contents

I	Suites	5
1	Rappel de 1ère	6
2	Raisonnement par récurrence	7
2.1	Description	7
2.2	Principe	8
3	Limites des suites	10
3.1	Notion de limite infinie d'une suite	10
3.2	Limites finies - suites convergentes	11
3.3	Limites et opérations algébriques	13
3.4	Théorèmes	15
II	Combinatoire et dénombrement	17
1	Notion d'ensemble	18
2	Dénombrement	21
2.1	Exemples importants	21
2.2	Dénombrer des k-uplets	22
2.3	Combinaison	23
III	Succession d'épreuves indépendantes et loi binomiale	25
1	Généralité (1ère)	26
1.1	Variable aléatoire	26
1.2	Succession d'épreuves quelconques	26
1.3	Succession d'épreuves indépendantes	27

2	Schéma de Bernoulli	29
3	Loi binomiale	31
IV	Limites de fonctions	34
1	Calcul de limite	35
1.1	Limite d'une fonction	35
1.2	Théorèmes	40
1.3	Asymptotes à une fonction	41
V	Continuité	44
1	Généralité	45
2	Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)	47
VI	Fonction logarithme népérien	50
1	Rappel sur la fonction exponentielle	51
2	La fonction $\ln$	53
3	Propriété algébrique	55
4	Etude de la fonction $\ln$	58
4.1	Limite aux bornes	58
4.2	Sens de variation	58
4.3	Equation $\ln(x)=m$	59
4.4	Autres limites de référence (théorème des croissances comparées)	59
4.5	Courbe représentative	59
5	Fonction du type $\ln(u)$	60
5.1	Domaine de définition	60
5.2	Dérivée de $\ln(u)$	60

VII	Dérivation et convexité	62
1	Dérivation	63
1.1	Généralité	63
1.2	Composition de fonctions	64
2	Convexité	67
2.1	Fonction convexe/concave	67
2.2	Point d'inflexion	68
VIII	Géométrie dans l'espace I	70
1	Géométrie vectorielle	71
1.1	Vecteur de l'espace	71
2	Position relative	74
3	Repère cartésien de l'espace et coordonnées	76
4	Représentation graphique d'une droite	80
5	Orthogonalité	82
IX	Géométrie dans l'espace II	84
1	Produit scalaire	85
1.1	Définition et propriété	85
1.2	Norme d'un vecteur et carré scalaire	87
2	Équation cartésienne de plan	88
3	Projeté orthogonal	90
X	Primitives et équations différentielles	91
1	Primitives	92
1.1	Définition	92
1.2	Propriétés	92
1.3	Primitives de fonctions usuelles	94

2	Équation différentielle (ED)	95
2.1	Généralités	95
2.2	Résolution de l'ED $y' = ay$	96
2.3	Résolution de l'ED $y' = ay + b$	96
2.4	Résolution de l'ED $y' = ay + f$	97

Part I

Suites

Chapter 1

Rappel de 1ère

Le chapitre sur les suites étant riche en première, on rappelle les différentes capacités attendues :

- Définir une suite et calculer des termes
- Modéliser avec une suite
- Représenter graphiquement une suite
- Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique et calculer le terme général
- Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique
- Étudier les variations de suites
- Conjecturer la limite éventuelle d'une suite

Rappel :

- Suites arithmétiques : on a $u_n = u_0 + rn$
- Suites géométriques : on a $v_n = v_0 \times q^n$

Chapter 2

Raisonnement par récurrence

2.1 Description

Le raisonnement par récurrence est utilisé pour montrer qu'une propriété dépendant d'un entier n est vraie pour tout n

Remarque

La propriété à démontrer est souvent soit une égalité, soit une inégalité
Eventuellement, $n \geq n_0$ où n_0 est un entier naturel donné

Idée : Montrons qu'une propriété est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

1. Vrai au début
2. La propriété se "transmet"
3. Conclure

Exemple : (de propriété à démontrer par récurrence)

- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- Si $x > 0$ alors $(1+x)^n \geq 1+nx$
- La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ est telle que $1 \leq u_n \leq 2$
- Le nombre $4^n - 1$ est un multiple de 3

2.2 Principe

On procède en 3 étapes :

1. Initialisation

On montre que la propriété est vraie au rang $n = 0$ (éventuellement $n = n_0$)

2. Hérédité

On démontre que si la propriété est vraie au rang n , alors elle est vraie au rang $n + 1$

3. Conclusion

La propriété étant vraie au rang $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Énoncé

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S_n = 1 + 2 + \dots + n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $P(n)$: « $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ». 1 2

Étape ① Initialisation Pour $n = 1$, on a $S_1 = 1$ et $\frac{1 \times (1+1)}{2} = 1$
 Donc $S_1 = \frac{1 \times (1+1)}{2}$. Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Étape ② Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
 Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n \times (n+1)}{2} + n+1 = \frac{n \times (n+1) + (n+1) \times 2}{2} = \frac{(n+1) \times (n+2)}{2}$$
3
 Donc $P(n+1)$ est vraie.

Étape ③ Conclusion On conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Conseils & Méthodes

1 Il faut tout d'abord identifier la propriété à démontrer par récurrence.

2 Une démonstration par récurrence se fait en trois étapes : initialisation, hérédité, puis conclusion.

3 On utilise l'hypothèse de récurrence.

Figure 2.1: Exemple de preuve par récurrence

- Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} = 2u_n + 1$
 Montrons par récurrence que $u_n = 2^n - 1$ pour tout $n \geq 0$

Initialisation On a $2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ donc $u_0 = 2^0 - 1$ donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité Supposons que la propriété est vraie au rang n , c'est à dire $u_n = 2^n - 1$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$, c'est à dire $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

On a : $u_{n+1} = 2u_n + 1$	$\longrightarrow$ Par définition
$u_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1$	$\longrightarrow$ D'après ce qu'on a supposé
$u_{n+1} = 2 \times 2^n - 2 + 1$	$\longrightarrow$ On développe
$u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$	$\longrightarrow$ On trouve ce qu'on voulait

Donc la propriété est héréditaire

Conclusion La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \geq 0$

- Soit (v_n) une suite définie par $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = 5v_n - 8 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Initialisation On a $v_0 = 3 \geq 3$ donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité Supposons que la propriété est vraie au rang n , c'est à dire $v_n \geq 3$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$ c'est à dire $v_{n+1} \geq 3$

On a : $v_{n+1} = 5v_n - 8$	$\longrightarrow$ Par définition
$v_{n+1} \geq 5 \times 3 - 8$	$\longrightarrow$ D'après ce qu'on a supposé
$v_{n+1} \geq 15 - 8$	$\longrightarrow$ On simplifie
$v_{n+1} \geq 7 \geq 3$	$\longrightarrow$ On trouve ce qu'on voulait

Donc la propriété est héréditaire

Conclusion La propriété est vraie au rang $n = 0$ et est héréditaire à partir de ce rang, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Chapter 3

Limites des suites

3.1 Notion de limite infinie d'une suite

Définition

On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ si pour tout réel A positif, l'intervalle $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Autrement dit, $\forall A \in \mathbb{R}^+$, l'inégalité $u_n \geq A$ est vraie à partir d'un certain rang.

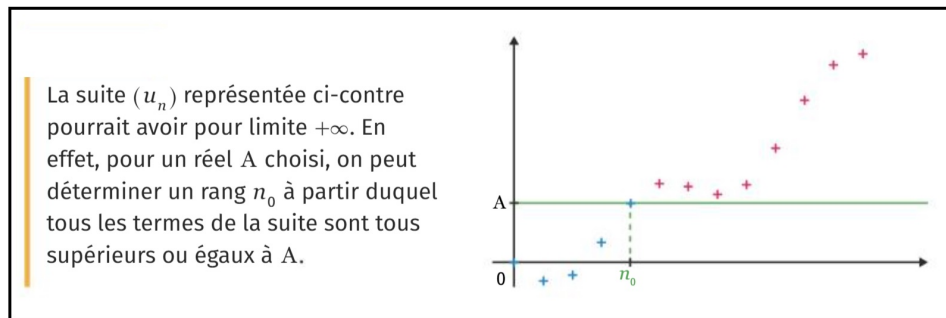


Figure 3.1: Exemple de limite $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

Notation

On dit que la limite de la suite (u_n) est $+\infty$ et on écrit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

Remarque

On définit de manière analogue une suite qui tend vers $-\infty$ et on note donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$

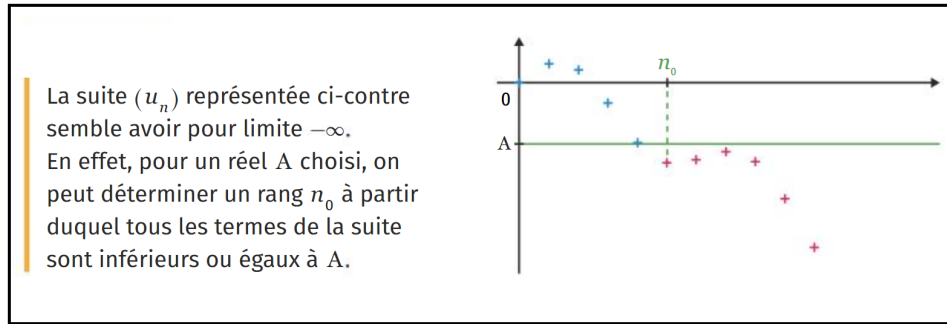


Figure 3.2: Exemple de limite $\lim_{n \rightarrow \infty} = -\infty$

Proposition

Limites de suites de référence

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a = +\infty$ si $a > 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a = 0$ si $a < 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$

Limites et opposés

- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$ est équivalent à $\lim_{n \rightarrow \infty} (-u_n) = +\infty$

3.2 Limites finies - suites convergentes

Définition

On dit que la suite (u_n) tend vers un nombre l si tout intervalle ouvert du type $]l - \epsilon; l + \epsilon[$ (avec $\epsilon > 0$) contient tous les termes de la suite après un certain rang

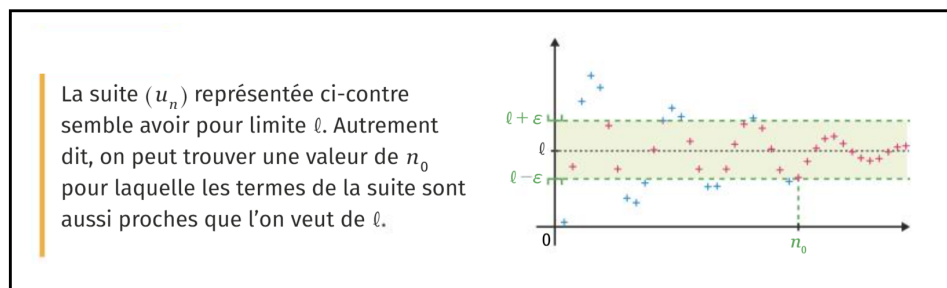


Figure 3.3: Exemple de limite $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$

Théorème

Si une suite (u_n) admet une limite finie l alors la limite l est unique

Notation

Si une suite (u_n) a une limite finie l , on dit aussi que la suite est convergente et qu'elle converge vers l et on écrit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$

Proposition

Limite des suites de référence

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Équivalence

Dire qu'une suite (u_n) tend vers l est équivalent à dire que $(u_n - l)$ tend vers 0

Remarque

On appelle suite divergente toute suite qui ne converge pas. Si une suite diverge alors soit sa limite vaut $+\infty$ ou $-\infty$, soit elle n'a pas de limite

3.3 Limites et opérations algébriques

Soit ℓ et ℓ' deux nombres réels, $\pm\infty$ veut dire $+\infty$ ou $-\infty$.

Somme de limites :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$

Produit de limites :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$\pm\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	F.I.

Quotient de limites :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0^+ ou 0^-	0^+ ou 0^-	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	F.I.	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.

Figure 3.4: Opérations sur les limites

Exemple

- Soit v_n tel que $v_n = (7n - 2) \left(3 + \frac{5}{n^3}\right)$
On a : $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} 7n = +\infty$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} 7n - 2 = +\infty$
et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^3} = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \frac{1}{n^3} = 3$
Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$ car $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \frac{1}{n^3}\right) \times \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 7n - 2\right)$
- Soit w_n tel que $w_n = n^2\sqrt{n} - \frac{2}{n} + 7$
On a : $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2\sqrt{n} = +\infty$
Puis $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{n} + 7 = 7$
Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = +\infty$

Méthode

Lever une forme indéterminée

Énoncé

Déterminer la limite des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

a) (u_n) définie par $u_n = n^2 - n$.

b) (v_n) définie par $v_n = \frac{4n^2}{n+1}$.

Solution

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$. Donc on obtient une forme indéterminée

du type « $+\infty - \infty$ ». Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n \times (n - 1)$ **1**

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 1 = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (par produit)

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^2 = +\infty$ (par produit)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty$ donc on obtient une forme indéterminée « $\frac{+\infty}{+\infty}$ »

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{n^2 \times 4}{n \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)}$ **2** donc $v_n = \frac{n \times 4}{1 + \frac{1}{n}}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \times 4 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ (par quotient)

Conseils & Méthodes

1 Pour lever une indéterminée, on peut factoriser ou développer.

2 Pour lever une indéterminée dans un quotient, on factorise le numérateur et le dénominateur par le terme de plus haut degré.

Figure 3.5: Méthode pour lever une forme indéterminée

Propriété

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- Si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$
- Si $q \leq -1$ alors u_n diverge

En résumé, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ +\infty & \text{si } q > 1 \end{cases}$

Exemple

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 350 \times 0,95^n = 0$, car $-1 < 0,95 < 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} -3 \times \left(\frac{101}{99}\right)^n = -\infty$, car $\frac{101}{99} > 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{101}{99}^n = +\infty$

3.4 Théorèmes

Définition

Soit (u_n) une suite :

- On dit qu'une suite est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier n , on a $u_n \leq M$
- On dit qu'une suite est minorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier n , on a $u_n \geq M$
- On dit qu'une suite est bornée si elle est majorée et minorée

Théorème de convergence monotone

Soit (u_n) une suite,

- Si (u_n) est croissante et majorée, alors la suite converge
- Si (u_n) est décroissante et minorée, alors la suite converge

Utiliser le théorème de convergence des suites monotones

Énoncé

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{n-1}{n+4}$.

1. Montrer que (u_n) est majorée par 1.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge.

Solution

$$1. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n - 1 = \frac{n-1}{n+4} - 1 = \frac{n-1-(n+4)}{n+4} = \frac{-5}{n+4} \quad 1$$

Donc $u_n - 1 < 0$ Donc $u_n < 1$. Donc (u_n) est majorée par 1.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n}{n+5} - \frac{n-1}{n+4} = \frac{n(n+4) - (n-1)(n+5)}{(n+4)(n+5)} \quad 2$$

$$= \frac{n^2 + 4n - (n^2 + 5n - n - 5)}{(n+4)(n+5)} = \frac{5}{(n+4)(n+5)}.$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc (u_n) est strictement croissante.

3. La suite (u_n) est strictement croissante et majorée par 1. Donc (u_n) converge. 3

Conseils & Méthodes

1 (u_n) majorée par 1 signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.

On montre que $u_n - 1 \leq 0$.

2 Pour étudier les variations, on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$:

• si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ou $u_{n+1} \geq u_n$, alors la suite est croissante.

• si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ou $u_{n+1} \leq u_n$, alors la suite est décroissante.

3 Toute suite croissante majorée converge.

Figure 3.6: Théorème de convergence monotone

Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites,

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Utiliser le théorème de comparaison

Énoncé

1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + 2 \times \sin(n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n - 2$

b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

2. Soit v_n la suite définie par $v_n = -n^2 - n + (-1)^n$.

Déterminer la limite de la suite (v_n) .

Solution

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ 1 Donc $-2 \leq 2 \times \sin(n) \leq 2$.

Donc $n - 2 \leq n + 2 \times \sin(n) \leq n + 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n - 2$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 2 = +\infty$. 2

D'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Conseils & Méthodes

1 Pour tout réel x , $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
et $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

2 On ne peut pas déterminer directement la limite de la suite (u_n) en utilisant les propriétés des opérations car la suite $(\sin(n))$ n'a pas de limite.

Figure 3.7: Théorème de comparaison

Théorème des gendarmes

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites et l un nombre réel

On suppose que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ alors la suite (v_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$

Utiliser le théorème des gendarmes

Énoncé

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$.

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ 1

Donc $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$. Donc $3 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 3 + \frac{1}{n}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ 2

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{n} = 3$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

Conseils & Méthodes

1 On ne peut pas déterminer directement la limite de la suite (u_n) en utilisant les propriétés des opérations car la suite $((-1)^n)$ n'a pas de limite. On essaye donc d'abord d'encadrer la suite (u_n) .

2 On détermine ensuite la limite des deux suites de l'encadrement.

Figure 3.8: Théorème des gendarmes

Part II

Combinatoire et dénombrement

Chapter 1

Notion d'ensemble

Définition

Un ensemble E est une collection d'objets distincts x qu'on appelle éléments. On dit alors que x appartient à E et on note $x \in E$.

Un ensemble E est dit fini lorsqu'il possède un nombre fini d'éléments. Dans ce cas, le nombre d'éléments de E est appelé le cardinal de E et est noté $\text{card}(E)$.

Exemple

- $E = \{A; B; C\}$ est un ensemble fini à 3 éléments (donc $\text{card}(E) = 3$) et on a par exemple $a \in E$ et $d \notin E$
- L'ensemble $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$ n'est pas fini.

Remarque

- L'ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'ensemble vide et se note $\emptyset$
- L'ordre n'intervient pas : $\{a; b\} = \{b; a\}$ et il n'y a pas de répétition d'un élément $\{a; a\} = \{a\}$
- Deux ensembles A et B dont l'intersection est vide sont dits disjoints et on écrit $A \cap B = \emptyset$

Définition

On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B si tout élément de A appartient à B .

On note $A \subset B$

Remarque

Attention à ne pas confondre $\in$ et $\subset$.

Un élément appartient ($\in$) à un ensemble mais un ensemble peut être inclus ($\subset$) dans un autre ensemble

Par exemple, $-1 \in \mathbb{Z}$ et $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Propriété

Si $E_1, E_2, E_3, \dots, E_p$ sont p ensembles finis deux à deux disjoints alors
 $card(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_p) = card(E_1) + card(E_2) + \dots + card(E_p)$

Exemple

Soient les ensembles $A = \{a; b; c; d\}$ et $B = \{x; y; z\}$, on a $A \cap B = \emptyset$ et
 $A \cup B = \{a; b; c; d; x; y; z\}$ donc $card(A \cup B) = 7 = card(A) + card(B)$

Définition

On appelle couple, triplet, k-uplet (ou k-liste) une collection ordonnée respectivement de deux objets, trois objets ou k objets

Exemple

$(1; -2)$ est un couple, $(i; j; k)$ est un triplet, $(\alpha; \beta; \gamma; \delta; \epsilon)$ est un 5-uplet.
Attention, l'ordre compte cette fois car on a $(1; -2) \neq (-2; 1)$

Définition

Soient E , F et G trois ensembles

- Le produit cartésien de E par F est l'ensemble des couples $(a; b)$ où $a \in E$ et $b \in F$. Il est noté $E \times F$
- Le produit cartésien $E \times F \times G$ est l'ensemble des triplets $(a; b; c)$ où $a \in E$, $b \in F$ et $c \in G$.
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k$ est l'ensemble des k -uplets $(a_1; a_2; \dots; a_k)$ où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$, $\dots$, $a_k \in E_k$.

Notation : $E \times E$ est noté E^2 et $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}}$ est noté E^k

Exemple

Si $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2\}$ alors :

- $E \times F = \{(a; 1); (a; 2); (b; 1); (b; 2); (c; 1); (c; 2)\}$
- $E^2 = \{(a; a); (a; b); (a; c); (b; a); (b; b); (b; c); (c; a); (c; b); (c; c)\}$

Propriété

Si $E_1, E_2, \dots, E_k$ sont k ensembles finis alors

$$\text{card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \cdots \times \text{card}(E_k)$$

Par conséquent, si E est un ensemble de cardinal n et si $p \in \mathbb{N}^*$ alors $\text{card}(E^p) = n^p$

Exemple

En reprenant les ensembles E et F de l'exemple précédent, on a bien $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F) = 3 \times 2 = 6$ et $\text{card}(E^2) = 3^2 = 9$

Chapter 2

Dénombrement

2.1 Exemples importants

2.1.1 QCM

Un QCM comporte 15 questions avec 4 choix de réponses : $a; b; c; d$ dont un seul est exact

Combien y a-t-il de façons de répondre ?

R : réponses possibles ($\underbrace{\square}_{4 \text{ choix}}, \underbrace{\square}_{4 \text{ choix}}, \square, \dots, \square) \leftarrow 15\text{-uplet}$

Donc il y aurait $4 \times 4 \times \dots \times 4 = 4^{15} = 1'073'741'824$ façons de répondre à ce qcm

2.1.2 Podium

On a 8 coureurs participant à la finale d'un 100m. On décerne 3 médailles (*or; argent; bronze*). Combien y a-t-il de podiums possibles ?

R : réponses possibles ($\underbrace{\square}_{8 \text{ choix}}^{\text{or}}, \underbrace{\square}_{7 \text{ choix}}^{\text{argent}}, \underbrace{\square}_{6 \text{ choix}}^{\text{bronze}}) \leftarrow 3\text{-uplet}$

Donc il y a $8 \times 7 \times 6 = 336$ possibilités

2.1.3 Loto

On tire 3 boules parmi 20 boules numérotées de 1 à 20. Combien de y a-t-il de tirages possibles ?

R : réponses possibles ($\underbrace{\square}_{20 \text{ choix}}, \underbrace{\square}_{19 \text{ choix}}, \underbrace{\square}_{18 \text{ choix}}) \leftarrow 3\text{-uplet}$

Mais le tirage $(1; 2; 3)$ est le même que $(1; 3; 2)$ ou $(2; 1; 3)$ etc...

Donc il y aurait $\frac{20 \times 19 \times 18}{6} = 1140$ tirages possibles

2.2 Dénombrer des k-uplets

Soit $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$. On appelle le résultat suivant

Théorème

Le nombre de k-uplets d'un ensemble à n éléments est n^k

Exemples

- Le QCM précédent
- Un cadenas à 4 chiffres $\rightarrow 10^4 = 10\,000$ possibilités
- Le nombre de résultats possibles lorsqu'on lance 3 fois un dé à 6 faces $\rightarrow 6^3 = 216$

Définition

On appelle factorielle et on note $n!$ le produit de tous les nombre entiers entre 1 et n

Remarque

- Par convention : $0! = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = n! \times (n+1)$

Exemple

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$80! \approx 7,5 \times 10^{118}$$

Théorème/Définition

Le nombre de k-uplets d'éléments distincts est appelé arrangement et pour un ensemble à n éléments, se calcule avec

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+2) \times (n-k+1)$$

Exemple

- Podium en notant E l'ensemble des coureurs, les classements possibles sont les 3-uplets d'éléments distincts de E , donc c'est un 3-arrangement et il y en a $\frac{8!}{(8-3)!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$
- On considère l'ensemble $\mathcal{A} = \{M; O; N; T; R; E\}$
Le nombre de 4-arrangements (mots de 4 lettres distinctes de $\mathcal{A}$) est donné par la formule $\frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{2!} = 360$

Cas particuliers

Si $k = n$, un n -uplet d'éléments distincts de E est appelé une permutation (un n -arrangement). Le nombre de permutations est de $n!$

Exemple

Le nombre d'anagrammes du mot "Montre" correspond au nombre de permutations de l'ensemble $S = \{M; O; N; T; R; E\}$ et il vaut $6! = 720$

2.3 Combinaison

Définition

Soit E un ensemble à n éléments et $k \leq n$ un entier naturel

Une combinaison de k éléments de E est un sous-ensemble de E possédant k éléments

Exemple

Soit $E = \{a; b; c; d\}$

Les combinaisons de 2 éléments de E sont :

$$\{\{a; b\}; \{a; c\}; \{a; d\}; \{b; c\}; \{b; d\}; \{c; d\}\}$$

Théorème

Le nombre de combinaisons à k éléments de E se note $\binom{n}{k}$, se lit "k parmi n" et est donné par la formule

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1) \times \cdots \times (n-k+2)(n-k+1)}{k(k-1) \times \cdots \times 2 \times 1}$$

Exemples

- Dans l'exemple précédent, on a le nombre de combinaisons de 2 éléments parmi 4 qui vaut : $\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4!}{2!2!} = 6$
- Loto : Le nombre de tirages de 3 boules parmi 20 correspond à $\binom{20}{3} = \frac{20!}{(20-3)!3!} = \frac{20!}{17!3!} = 1140$
- Le nombre de délégations de 4 personnes parmi 15 est de $\binom{15}{4} = \frac{15!}{(15-4)!4!} = \frac{15!}{11!4!} = 1365$

Propriétés

- $\binom{n}{0} = 1$ car le seul sous-ensemble de E qui contient 0 élément est $\emptyset$
De même, $\binom{n}{n} = 1$ car il existe un seul sous-ensemble de E qui contient tous ses éléments
- $\binom{n}{1} = n$ car il existe n sous-ensembles de E contenant 1 seul élément
De même, $\binom{n}{n-1} = n$ car il existe n sous-ensembles de E où il manque 1 élément

Part III

Succession d'épreuves indépendantes et loi binomiale

Chapter 1

Généralité (1ère)

1.1 Variable aléatoire

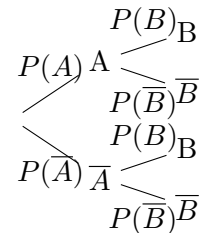
Voir image sur la page dessous

1.2 Succession d'épreuves quelconques

En résumé :

- On peut représenter une succession d'épreuves quelconques à l'aide d'un arbre pondéré
- Dans l'arbre ci-contre, le chemin A suivi du chemin B représente l'intersection des événements A et B : $A \cap B$
- Les probabilités portées sur les branches du second niveau sont des probabilités conditionnelles

On rappelle la formule $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$



Propriété (formule de probabilité totale)

Soient E et F deux événements d'un univers Ω . Si $P(E) \neq 0$ et $P(\overline{E}) \neq 0$, alors

$$P(F) = P(E \cap F) + P(\overline{E} \cap F) = P(E) \times P_E(F) + P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(F)$$

Rappel sur les variables aléatoires

Définition

Une variable aléatoire réelle X sur Ω est une fonction qui à chaque issue de Ω associe un nombre réel.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un univers Ω . Définir la loi de probabilité de X , c'est associer à chaque valeur de X sa probabilité. On résume ceci dans un tableau.

Valeurs x_i de X	x_1	x_2	...	x_n
Probabilité $P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

On doit avoir $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

L'espérance d'une variable aléatoire X , notée $E(X)$, est la valeur moyenne théorique des valeurs prises par X lorsqu'on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire associée : $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$.
Pour tous réels a et b , on a $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Exemple. On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. On gagne 6 € si on tombe sur 6, on perd 1 € sinon. On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique.

Alors, la loi de probabilité de X est :

x_i	-1	6
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Exemple. En reprenant la variable aléatoire de l'exemple précédent, alors $E(X) = -1 \times \frac{5}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$.
Sur un très grand nombre de parties jouées, le gain moyen théorique s'élève à 0,17 € environ.

Exercice sur les variables aléatoires

Une urne contient deux boules vertes et trois boules noires, indiscernables au toucher. On tire au hasard trois boules avec remise.

- Représenter cette expérience aléatoire par un arbre pondéré. On notera N l'évènement "tirer une boule noire" et V l'évènement "tirer une boule verte".
- On note X la variable aléatoire comptant le nombre de boules noires tirées.
 - Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - Donner, dans un tableau, la loi de probabilité de X .
 - Calculer $E(X)$ et interpréter ce résultat

Figure 1.1: Rappel

1.3 Succession d'épreuves indépendantes

Définition

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω ,

On dit que A et B sont indépendants lorsque la réalisation de A n'influe pas sur la réalisation de B et inversement

Cela se traduit par $P_A(B) = P(B)$ ou $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

On peut représenter une succession de n épreuves par un arbre pondéré à n niveaux. On considère n épreuves indépendantes ayant pour univers respectifs $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_n$

La succession de ces n épreuves indépendantes constitue une épreuve dont les issues sont les éléments du produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$

Dans ce cas, la probabilité d'une issue $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est égale au produit des probabilités des issues des composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$

Exemple

Un menu propose deux entrées e_1 et e_2 , trois plats p_1 , p_2 , et p_3 et un dessert d . Un client prend de façon équiprobable une entrée, un plat et un dessert. L'ensemble des issues de cette expérience est $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$ où $\Omega_1 = \{e_1; e_2\}$, $\Omega_2 = \{p_1; p_2; p_3\}$, $\Omega_3 = \{d\}$.

Ainsi, $\Omega = \{(e_1; p_1; d); (e_1; p_2; d); (e_1; p_3; d); (e_2; p_1; d); (e_2; p_2; d); (e_2; p_3; d)\}$

On a bien par exemple $P(e_1; p_1; d) = \frac{1}{6} = P(e_1) \times P(p_1) \times P(d) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 1$

Chapter 2

Schéma de Bernoulli

Définition

On appelle épreuve de Bernoulli de paramètre p , toute expérience aléatoire possédant deux issues:

- L'une est appelée succès, notée " S " dont la probabilité est P
- L'autre est appelée échec, notée " E " ou " $\bar{S}$ " dont la probabilité est $1 - P$

Exemples

- Un lancer de dé équilibré à 6 faces dans lequel on s'intéresse à l'apparition de S : "Obtenir un 6", qui est une épreuve de Bernoulli de paramètre $P = \frac{1}{6}$ et la probabilité de E : "Ne pas obtenir de 6" est $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
- Une urne contient 3 boules bleues et 1 boule rouge. On tire au hasard et on considère le succès S : "Obtenir une boule rouge" qui est une épreuve de Bernoulli de paramètre $P = \frac{1}{4}$

Propriété

Dans une épreuve de Bernoulli de paramètre P , la variable aléatoire X qui associe la valeur 1 aux succès et 0 à l'échec est une variable de Bernoulli de paramètre P . Elle suit la loi de Bernoulli de paramètre :

$$\begin{array}{c|c|c} k & 0 & 1 \\ \hline P(X = k) & 1 - p & p \end{array}$$

Définition

On appelle schéma de Bernoulli, la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes

Exemple

3 tirages avec remise de l'urne de l'exemple précédent (3 boules bleues et 1 boule rouge) en prenant comme succès S : "tirer une boule rouge" constituent une épreuve de Bernoulli avec $n = 3$ et de paramètre $P = \frac{1}{4}$

ARBRE DE PROBA A VENIR

Chapter 3

Loi binomiale

Définition

On considère un schéma de Bernoulli constitué de n épreuves où la probabilité de succès est p

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès lors de n épreuves

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi binomiale de paramètres n et p . On la note $B(n; p)$

Remarque

La variable aléatoire X prend toutes les valeurs entières entre 0 et n

Exemple

Énoncé

Gloria a remarqué que quand un client entre dans sa librairie, la probabilité qu'il achète un livre est 0,67. On admet que les achats des clients sont indépendants les uns des autres.

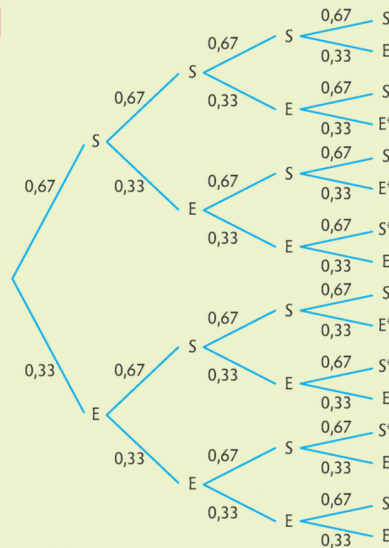
Quatre clients entrent dans la librairie. On s'intéresse au fait qu'ils achètent un livre ou non.

1. Justifier que l'on peut associer la situation de l'énoncé à un schéma de Bernoulli dont on précisera n , le nombre de répétitions, et p , la probabilité d'un succès.
2. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.
3. Calculer la probabilité que deux des quatre clients achètent un livre.

Solution

1. En considérant que l'achat d'un livre par le client est un succès, **1** on réalise $n = 4$ fois, de manière indépendante, la même expérience de Bernoulli **2** pour laquelle la probabilité d'un succès (S) est $p = 0,67$ donc cette situation correspond bien à un schéma de Bernoulli avec $n = 4$ et $p = 0,67$.

2. **3**



3. **4** $p(X = 2) = 6 \times (0,67^2 \times 0,33^2) \approx 0,29$ (voir *). **5**

Conseils & Méthodes

- 1 On associe le succès à l'événement qui nous intéresse (ici, « le client achète ») de sorte que l'on ait affaire à une expérience à deux issues, succès S et échec E (ou $\bar{S}$).
- 2 Pour justifier qu'une succession d'expériences est un schéma de Bernoulli, il y a trois arguments à donner : **1.** l'expérience réalisée est la même, **2.** c'est une expérience de Bernoulli, **3.** toutes les réalisations sont indépendantes.
- 3 Dans l'arbre, les sous-arbres partant d'un même nœud sont identiques et correspondent à l'arbre représentant l'épreuve de Bernoulli (avec les pondérations 0,67 et 0,33 ici).
- 4 Identifier les chemins associés au nombre de succès souhaité et appliquer les méthodes de calculs.
- 5 Chacun des six chemins correspondant à 2 succès (et donc 2 échecs) porte 2 pondérations 0,67 et 2 pondérations 0,33, ce qui correspond à une probabilité $0,67^2 \times 0,33^2$ pour chaque chemin.

Justification qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale

L'expérience "....." a deux issues possibles :

- Succès : ".....", obtenu avec une probabilité $p = \dots$
- Echec : ".....", obtenue avec une probabilité $1 - p = \dots$

Cette expérience est répétée fois de manière identique et indépendante
 X est la variable aléatoire égale au nombre de succès.
 X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = \dots$ et $p = \dots$

Figure 3.1: Justification de l'utilisation de la loi binomiale

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n; p)$

Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

avec $\binom{n}{k}$ le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments

Remarque : Si $X \sim B(n, p)$ alors la calculatrice donne (TI-83)

- $\binom{n}{k} \rightarrow nCr$ en tapant `math` puis PROB
- $P(X = k) \rightarrow \text{binomFdp}(n; p; k)$ en tapant `2nde + var`
- $P(X \leq k) \rightarrow \text{binomFrep}(n; p; k)$ en tapant `2nde + var`

Remarque : Si $X \sim B(n, p)$ alors :

- L'espérance de X est $E(X) = np$
- La variance de X est $V(X) = np(1 - p)$
- L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$

Part IV

Limites de fonctions

Chapter 1

Calcul de limite

1.1 Limite d'une fonction

1.1.1 Limite en l'infini

Définition

La fonction f a pour limite l en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant $l \in \mathbb{R}$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grands.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ qui signifie $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$

Exemple Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + 1$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right) = 1$.

En effet, l'inverse de x se rapproche de 0 à mesure que x augmente.

Soit un intervalle ouvert I tel que $1 \in I$. Alors, $f(x)$ sera toujours dans I pour x assez grand.

Graphiquement, aussi étroite que soit une bande parallèle à la droite d'équation $y = 1$ et qui la contient, il existe toujours une valeur de x au delà de laquelle $\mathcal{C}_f$ ne sort plus de cette bande.

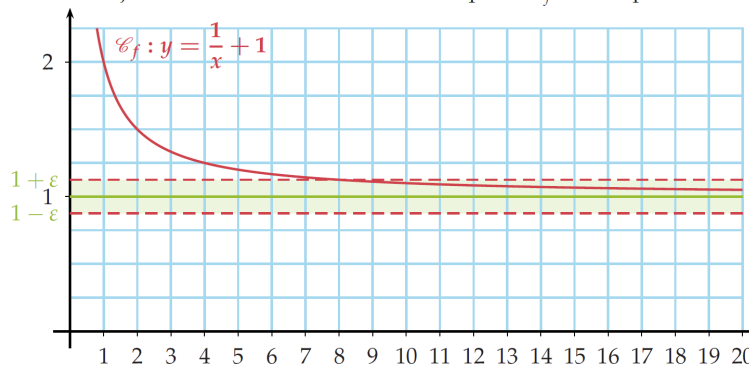


Figure 1.1: La fonction converge en $+\infty$

Définition

La fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $[a; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand

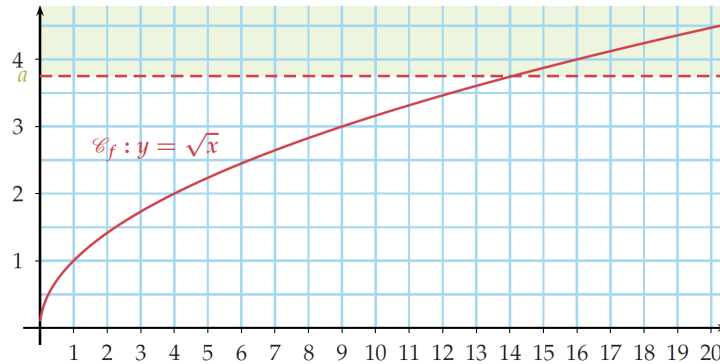
On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Exemple Soit f la fonction racine carrée. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

En effet, $\sqrt{x}$ devient aussi grand que l'on veut à mesure que x augmente.

Soit un intervalle ouvert $I =]a; +\infty[$. Alors, $f(x)$ sera toujours dans I pour x assez grand.

Graphiquement, si on considère le demi-plan supérieur de frontière une droite d'équation $y = a$, il existe toujours une valeur de a au-delà de laquelle $\mathcal{C}_f$ ne sort plus de ce demi-plan.



REMARQUE :

- On définit de façon analogue : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- Il existe des fonctions qui n'admettent pas de limite en l'infini. Par exemple, les fonctions sinus et cosinus n'admettent de limite ni en $+\infty$, ni en $-\infty$.
- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas forcément croissante.

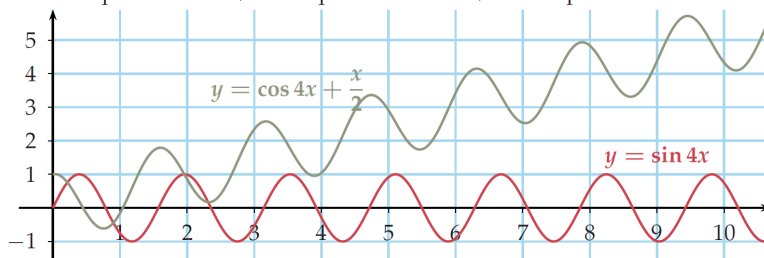


Figure 1.2: La fonction ne converge pas en $+\infty$

1.1.2 Limite en x_0

Définition

La fonction f a pour limite $+\infty$ en x_0 si tout intervalle $[a; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour des x assez proches de x_0

On note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

Exemple Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1}$. On a $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = +\infty$.
En effet, si x tend 1, alors $x-1$ tend vers 0 et son inverse tend vers $+\infty$.

Soit un intervalle ouvert $I =]1; 1 + \epsilon[$. Alors, $f(x)$ sera toujours dans I pour x assez proche de x_0 . Graphiquement, $\mathcal{C}_f$ peut être aussi proche que l'on veut de la droite d'équation $x = 1$.

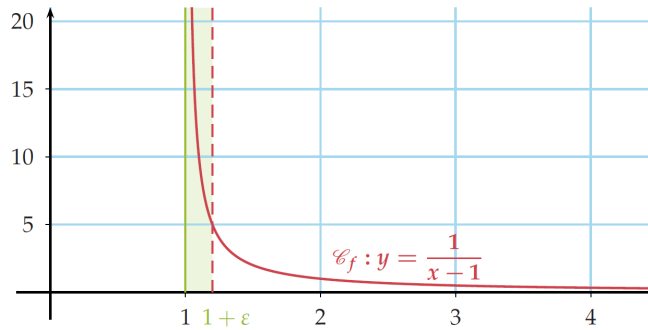


Figure 1.3: La fonction tend vers $+\infty$ en $x_0 = 1$

Propriété

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - l] = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$

Théorème

Les polynômes et les fractions de polynômes admettent une limite en toute valeur x_0 de leur ensemble de définition.

Plus généralement, si $x_0 \in \mathcal{D}_f$ et f admet une limite finie en x_0 alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Exemple

Soit $f(x) = \frac{x^2-2x+7}{x+4}$

alors $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \frac{6}{5}$

Question : Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$?

Définition

On peut étudier la limite d'une fonction en un réel a :

- Par les valeurs inférieures à ce réel (on parle de limite à gauche de a)
- Par les valeurs supérieures à ce réel (on parle de limite à droite de a)

Notation

On note $\lim_{x \rightarrow a^-}$ ou $\lim_{x \rightarrow a, x < a}$ la limite à gauche de a

On note $\lim_{x \rightarrow a^+}$ ou $\lim_{x \rightarrow a, x > a}$ la limite à droite de a

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Limites des fonctions usuelles

Fonction inverse	• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$	• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$	• $\lim_{\substack{x < 0 \\ x \rightarrow 0}} \frac{1}{x} = -\infty$	• $\lim_{\substack{x > 0 \\ x \rightarrow 0}} \frac{1}{x} = +\infty$
Fonction puissance	• Pour tout entier naturel n : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$	• Si n est pair : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$	• Si n est impair : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$	
Fonction exponentielle	• $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	• $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$	• $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$	• $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$
Fonction racine carrée et racine carrée inverse	• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = 0$	• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$	• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

MÉTHODE Déterminer une limite de fonction

On applique les propriétés d'opérations sur les limites.

Si la limite est indéterminée, « $+\infty + (-\infty)$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » ou « $\frac{0}{0}$ », on essaye de :

- factoriser par le terme prépondérant ;
- multiplier par la quantité conjuguée^a si des racines carrées interviennent ;

Exercice d'application Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$

Correction Ces limites sont indéterminées (respectivement formes « $\infty - \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ »).

1) On multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée de $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$

Or, par composition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$.

Et, par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = +\infty$. Donc, par inverse : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$.

2) Divisons le numérateur et le dénominateur par x^2 . Alors, $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}$.

Or, par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$.

Donc, par quotient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 2$.

Exemples

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2 + \frac{1}{x}\right) \sqrt{x} = -\infty$
car $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2 + \frac{1}{x} = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 + 4} = 0$
car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 4 = +\infty$

Pour lever une indéterminée, on utilise une méthode similaire à celle des suites

Soit f et g deux fonctions, on note α une valeur réelle a ou a^+ ou a^- ou $-\infty$ ou $+\infty$.

Propriété Limites d'une somme et d'un produit				Propriété Limite d'un quotient		
$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) + g(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \times g(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$	ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ Règle des signes	ℓ	$\pm\infty$	0
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	indéterminée	ℓ	0	$\pm\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$ Règle des signes
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	0	indéterminée
$+\infty$	$-\infty$	indéterminée	$-\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	indéterminée

Figure 1.4: Opérations sur les limites de fonctions

1.2 Théorèmes

a désigne soit un nombre réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$

1.2.1 Conservation d'une inégalité par passage à la limite

Théorème

Si $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' \end{cases}$
Alors $l \leq l'$

1.2.2 Théorème des gendarmes

Théorème

Si $\begin{cases} u(x) \leq f(x) \leq v(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim_{x \rightarrow a} u(x) = l, \lim_{x \rightarrow a} v(x) = l \end{cases}$
Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

1.2.3 Théorème de comparaison

Théorème

Si $\begin{cases} f(x) \geq u(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty \end{cases}$

Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

Et aussi, si $\begin{cases} f(x) \leq u(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim_{x \rightarrow a} u(x) = -\infty \end{cases}$

Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

1.2.4 Théorème des croissances comparées

Théorème

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

En fait, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

En fait, l'exponentielle l'emporte sur n'importe quelle puissance de x

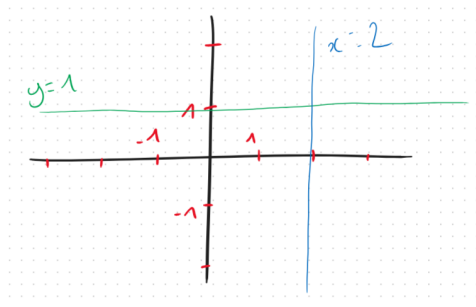
1.3 Asymptotes à une fonction

Rappel

Dans un repère orthonormé, les coordonnées d'un point $A(x_A; y_A)$ sont définis à l'aide de son abscisse et son ordonnée

La droite d'équation $y = a$ signifie la droite dont tous les points sont d'ordonnée a , c'est donc la droite horizontale passant par $(0, a)$. De même, la droite d'équation $x = a$ est la droite verticale passant par $(a, 0)$.

Exemple :



Définition

Soit f une fonction dont la courbe représentative est C_f . Une droite d est dite asymptote à C_f lorsque C_f se rapproche infiniment de d

Exemple

On prend la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

La courbe se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses en $+\infty$ (et en $-\infty$). L'axe des abscisses (qui est la droite d'équation $y = 0$) est donc asymptote à la fonction inverse en $+\infty$

1.3.1 Asymptote horizontale

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à la courbe C_f

En effet, dans l'exemple précédent, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est bien asymptote horizontale à la fonction inverse en $+\infty$

1.3.2 Asymptote verticale

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote verticale à la courbe C_f

En effet, dans l'exemple précédent, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ est bien asymptote verticale à la fonction inverse en $+\infty$

Part V

Continuité

Chapter 1

Généralité

Q Soit f une fonction définie sur $[a; b]$ telle que $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$
Est ce qu'il existe $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = 0.5$?

R Non, par exemple :

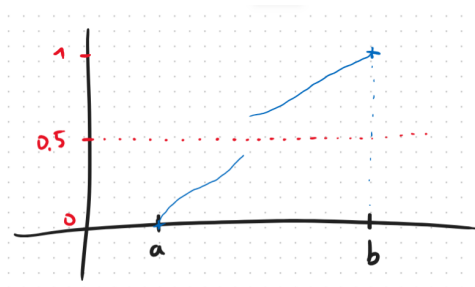


Figure 1.1: Exemple 1

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a . On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

La fonction est continue en I si f est continue en tout point de I

Remarque

Graphiquement, cela signifie que la courbe de f peut se tracer "sans lever le crayon"

Propriétés

- Les fonctions de références (affine, polynomiale, racine carrée, exponentielle, ...) sont continues sur leur ensemble de définition
- La somme et le produit de fonctions continues sont continus
- Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur celui-ci

Remarque

la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$

Chapter 2

Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)

Q Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ telle que $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$
L'équation admet-elle une unique solution ?

R Non, par exemple :

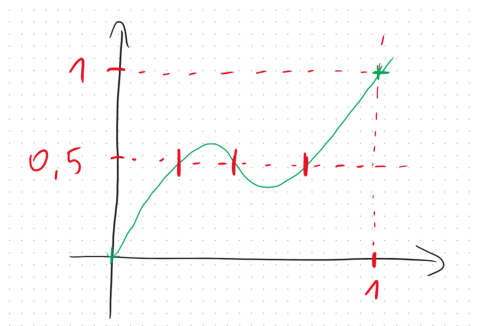


Figure 2.1: Exemple 2

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Soient a et b deux réels de I .

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c tel que $f(c) = k$

Autrement dit $\forall a, b \in \mathbb{R}$, il y a au moins une solution à $f(x) = k$ avec $f(a) \leq k \leq f(b)$ et $a \leq x \leq b$

Exemple : On pose $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1$

Montrons que l'équation $f(x) = -1$ admet au moins une solution dans $[-3; 0]$

On a f continue sur $[-3; 0]$ et -1 est compris entre $f(-3) = -2$ et $f(0) = 1$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = -1$ admet au moins une solution dans $[-3; 0]$

Corollaire du TVI

Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution c dans $[a; b]$

Exemples

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous

x	$-\infty$	-3	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-5	4	1

Par convention, les flèches obliques dans un tableau de variations traduisent la continuité et la stricte monotonie

Sur $] -\infty; -3]$, on a :

- f est continue
- f est strictement décroissante
- 0 est compris entre $+\infty$ et -5

D'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α_1

Sur $] -3; \sqrt{2}]$, on a :

- f est continue
- f est strictement croissante
- 0 est compris entre -5 et 4

D'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α_2

Sur $]\sqrt{2}; +\infty]$, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution car $f(x) > 1$

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet 2 solutions α_1 et α_2 dans $\mathbb{R}$

2. On pose $g(x) = x^3 + x - 3$ sur $[-10; 10]$

Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et donnons un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}

Sur $[-10; 10]$, on a :

- g est continue
- g est strictement monotone car $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$
- 0 est compris entre $g(-10) = -1013$ et $g(10) = 1007$

D'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α

Encadrement de α :

On a $f(1) = -1$ et $f(2) = 7$ donc on a $\alpha \in [1; 2]$

On applique la méthode dite **de balayage** (réduire le pas pour s'approcher)

On a alors $1,213 < \alpha < 1,213$

Part VI

Fonction logarithme népérien

Chapter 1

Rappel sur la fonction exponentielle

La fonction exponentielle, notée $\exp$, est l'unique fonction $f(x) = e^x$ définie et dérivable en $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et qui vérifie $e^0 = 1$

Propriété fondamentale

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)}$

On a alors $e^{x+y} = e^x \times e^y$; $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$; $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ et $(e^x)^n = e^{xn}$

Exemple

$$\frac{(e^{5x+1})^2 \times e^7}{e^{4x}} = \frac{e^{10x+9}}{e^{4x}} = e^{6x+9}$$

Propriété

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a : $e^x = e^y \iff x = y$ (respectivement $>, <, \geq, \leq$)

Exemples

- $e^{7x+5} = 1 \iff e^{7x+5} = e^0$
 $\iff 7x+5 = 0$
 $\iff x = \frac{-5}{7}$

- $e^{2x-3} - e^{x+1} \leq 0 \iff e^{2x-3} \leq e^{x+1}$
 $\iff 2x - 3 \leq x + 1$
 $\iff x \leq 4$

Chapter 2

La fonction $\ln$

Définition

On appelle fonction logarithme népérien, notée $\ln$, l'unique fonction définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ telle que

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } f(1) = 0$$

Conséquence

- $\ln(x)$ a un sens lorsque $x > 0$
- La dérivée de $\ln(x)$ est $\frac{1}{x}$
- $\ln(1) = 0$

Remarque

En physique, la fonction $\ln$ se note $\log_e$

Propriété : lien avec l'exponentielle

On a pour tout réel $a > 0$ et b :

$$\ln a = b \iff a = e^b$$

Méthode
1

Résoudre une équation/inéquation avec ln ou exp

Énoncé

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

- a) $\ln(x) = 5$ b) $e^x = 3$ c) $\ln(1-x) \leq -1$ d) $e^{2x-3} > 4$

Solution

- a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(x) = 5 \Leftrightarrow x = e^5$, d'où $S = \{e^5\}$.
 b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$, d'où $S = \{\ln(3)\}$.
 c) Pour tout $1-x > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1[$,
 $\ln(1-x) \leq -1 \Leftrightarrow 1-x \leq e^{-1}$ c'est-à-dire $x \geq 1 - e^{-1}$ d'où $S = [1 - e^{-1}; +\infty[\cap]-\infty; 1[$
 soit $S = [1 - e^{-1}; 1[$.
 d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x-3} > 4 \Leftrightarrow 2x - 3 > \ln(4)$ $\Leftrightarrow x > \frac{\ln(4)+3}{2}$
 d'où $S =]\frac{\ln(4)+3}{2}; +\infty[$.

Conseils & Méthodes

- 1 Commencer par déterminer les conditions d'existence, à savoir l'ensemble (E) des réels x tels que $u(x) > 0$ dans l'expression $\ln(u(x))$.
 2 Simplifier un logarithme en appliquant la fonction exponentielle.
 3 Simplifier en appliquant la fonction ln.

Conséquence

- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $\ln(e^x) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $e^{\ln(x)} = x$

Chapter 3

Propriété algébrique

Propriété fondamentale

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Démonstration

$\forall a > 0, b > 0$, on a $e^{\ln(ab)} = ab = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = e^{\ln(a) + \ln(b)}$
Donc $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

Propriétés

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a :

- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^p) = p \ln(a)$ pour $p \in \mathbb{Z}$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$

Méthode 3

Utiliser les propriétés algébriques de $\ln$

Énoncé

Exprimer en fonction de $\ln 2$ chacun des nombres suivants.

- a) $\ln \frac{1}{4}$ b) $\ln 8 + 5 \ln 2$ c) $\ln \sqrt{32}$ d) $\ln 10 - \ln 20$

Solution

a) $\ln \frac{1}{4} = -\ln 4 = -\ln(2^2) = -2 \ln 2$ 1

b) $\ln(2^3) + 5 \ln 2 = 3 \ln 2 + 5 \ln 2 = 8 \ln 2$ 2

c) $\ln(\sqrt{32}) = \frac{1}{2} \ln 32 = \frac{1}{2} \ln(2^5) = \frac{5}{2} \ln 2$ 3

d) $\ln 10 - \ln 20 = \ln\left(\frac{10}{20}\right) = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$ 2

Conseils & Méthodes

1 Utiliser les propriétés $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$ ainsi que $\ln a^n = n \ln a$.

2 Avec une somme/différence $\ln a + \ln b$ on peut penser à utiliser $\ln a + \ln b = \ln(a \times b)$;
 $\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$.

3 Chercher à écrire $\ln a$ sous la forme $\ln(c^n)$, soit $n \ln c$.

Propriété

Soient a et b des réels strictement positifs,
on a $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$ (respectivement $>, <, \geq, \leq$)

Exemple

Réolvons $\ln(2x + 1) \leq -1$

$\ln(2x + 1)$ a du sens si $2x + 1 > 0 \iff x > \frac{-1}{2}$

Et $\ln(2x + 1) \leq -1 \iff \ln(2x + 1) \leq \ln(e^{-1})$

Propriété $\iff 2x + 1 \leq e^{-1}$

$\iff 2x \leq e^{-1} - 1$

$x \leq \frac{e^{-1}-1}{2}$

Conclusion : $S =]-\frac{1}{2}; \frac{e^{-1}-1}{2}]$

Remarque

- On a $\ln(x) < 0$ si $x \in]0; 1[$
- $\ln(x) = 0$ si $x = 1$
- $\ln(x) > 0$ si $x > 1$
- On a $a^b = e^{b \ln(a)}$

Méthode
4

Résoudre une inéquation où l'inconnue est en exposant

Énoncé

Résoudre l'inéquation $\left(\frac{2}{5}\right)^n < 10^{-3}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Solution

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc l'inéquation

$$\left(\frac{2}{5}\right)^n < 10^{-3} \text{ est équivalente à } \ln\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) < \ln(10^{-3}) \quad 1$$

$$\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{2}{5}\right) < \ln(10^{-3}) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(10^{-3})}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} \quad 2$$

$$\text{Or } \frac{\ln(10^{-3})}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} \approx 7,5 ; \text{ par conséquent, } n \geq 8. \quad 3$$

Conseils & Méthodes

- 1 Pour se « débarrasser » de l'inconnue en exposant, il faut penser à appliquer la fonction $\ln$ dans chaque membre de l'inéquation.
- 2 Lorsqu'il s'agit de diviser les membres d'une inéquation par $\ln a$, il faut être vigilant quant au signe de $\ln a$.
Pour $0 < a < 1$, $\ln a < 0$: le sens de l'inégalité change. En revanche, si $a > 1$, $\ln a > 0$ et le sens de l'inégalité reste alors le même.
- 3 Ne pas oublier de conclure en tenant compte du fait que n est un entier naturel.

Chapter 4

Etude de la fonction $\ln$

On rappelle que la fonction $\ln$ est définie sur $]0; +\infty[$

4.1 Limite aux bornes

Théorème

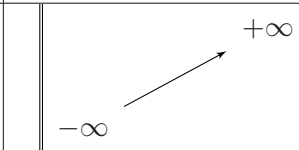
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln = +\infty$$

4.2 Sens de variation

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

La dérivée est positive en $]0; +\infty[$ donc la fonction $\ln$ est strictement croissante sur cet intervalle

x	0	$+\infty$
$\ln$	$-\infty$	$+\infty$



Conséquence

Pour tout réel $a > 0$ et $b > 0$, on a :

- $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$
- $\ln(a) > \ln(b) \iff a > b$ de même avec $\geq, >, \leq$
- $\ln(a) < 0 \iff 0 < a < 1$
- $\ln(a) > 0 \iff a > 1$

4.3 Equation $\ln(x)=m$

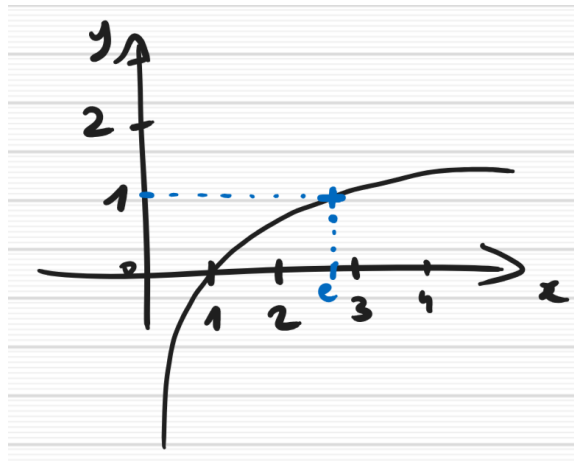
La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

Pour tout réel m , l'équation $\ln(x) = m$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$ qui est e^m

4.4 Autres limites de référence (théorème des croissances comparées)

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$

4.5 Courbe représentative



Chapter 5

Fonction du type $\ln(u)$

5.1 Domaine de définition

L'ensemble de définition d'une fonction composée de type $\ln(u)$ est l'intervalle sur lequel $u > 0$

Exemple

- On pose $f(x) = \ln(3x + 4)$
On cherche x tel que $3x + 4 > 0 \iff x > \frac{-4}{3}$
Donc f est définie sur $] \frac{-4}{3}; +\infty[$
- $g(x) = \ln(x^2)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ car $x^2 > 0 \iff x \neq 0$
Remarque : $\ln(x^2) = 2 \ln(x)$ mais la fonction $f(x) = 2 \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$

5.2 Dérivée de $\ln(u)$

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur I .
La fonction $\ln(u)$ est dérivable en I et :

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

Exemple

- $f(x) = \ln(3x + 4)$ alors $f'(x) = \frac{3}{3x+4}$
- $g(x) = \ln(x^2)$ alors $g'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$
Et on remarque que $(\ln(x^2))' = (2\ln(x))' = 2 \times \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$

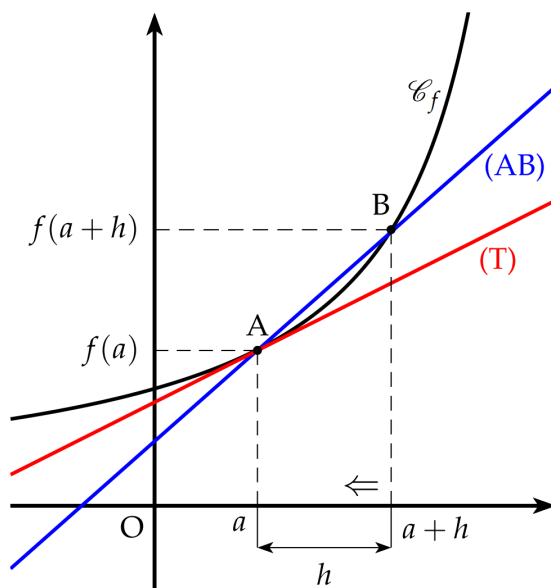
Part VII

Dérivation et convexité

Chapter 1

Dérivation

1.1 Généralité



Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Ce quotient est le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$

L'idée de la dérivée : Lorsque le point B se rapproche de A , la droite (AB) se confond avec (T)

Définition

Si la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe lorsque h tend vers 0, on dit que f est dérivable en a et on note $f'(a)$ sa limite

On a : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Propriété

Si f est dérivable en a , le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $(a; f(a))$.

La tangente en ce point admet pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

1.2 Composition de fonctions

Définition

Soient u une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans J (c'est à dire $\forall x \in I; f(x) \in J$) et v une fonction définie sur J

On appelle la fonction composée de u par v , notée $v \circ u$ (se lit v rond u), la fonction définie sur I par $v \circ u = v(u(x))$

Exemple

- Soient u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + 1$ et v la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $v(x) = \sqrt{x}$
Comme $u(x) \in \mathbb{R}^+$, alors $v \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$ par
 $v \circ u = v(u(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$
- Soient u et v des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 3x+4$ et $v(x) = x^2$
Alors $v \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$ et on a
 $v \circ u = v(u(x)) = v(3x + 4) = (3x + 4)^2$

Remarque

En général, $u \circ v \neq v \circ u$. En effet, dans le dernier exemple, on a
 $u \circ v = u(v(x)) = u(x^2) = 3x^2 + 4 \neq v \circ u(x)$

Propriété

Soient les fonctions u et v de la définition précédente.

Si u est dérivable sur I et v est dérivable sur J alors $v \circ u$ est dérivable sur I et on a $\forall x \in I$:

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x) = u'(x) \times v'(u(x))$$

$$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$$

Exemples

- $u(x) = x^3 + 5$ et $v(x) = \sqrt{x}$ alors
 $v \circ u(x) = \sqrt{x^3 + 5}$ et $(v \circ u)'(x) = 3x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x^3+5}} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}$
- $u(x) = x^2 - 1$ et $v(x) = x^4$ alors
 $v \circ u(x) = (x^2 - 1)^4$ et $(v \circ u)'(x) = 2x \times 4(x^2 - 1)^3 = 8x(x^2 - 1)^3$
- $u(x) = x^4 - 7x$ et $v(x) = e^x$ alors
 $v \circ u(x) = e^{x^4-7x}$ et $(v \circ u)'(x) = (4x^3 - 7) \times e^{x^4-7x}$

Conséquence

On a pour toute fonction dérivable en I

- $(e^u)' = u'e^u$
- $(u^n)' = nu' \times u^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$ si $u \neq 0$ sur I
- $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ si $u > 0$ sur I

Définition

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée. Si f' est dérivable sur I alors on note f'' sa fonction dérivée et elle est appelée **dérivée seconde** de f .

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5x^2 - 7x + 2$ alors $f'(x) = 3x^2 + 10x - 7$ et $f''(x) = 6x + 10$

Remarque

En particulier, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f . Dans ce cas précédent, $f^{(3)}(x) = 6$; $f^{(4)}(x) = 0; \dots$

Chapter 2

Convexité

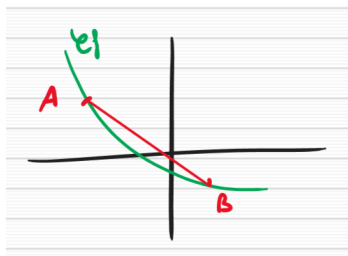
2.1 Fonction convexe/concave

Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur I et C_f sa courbe représentative.
On dit que :

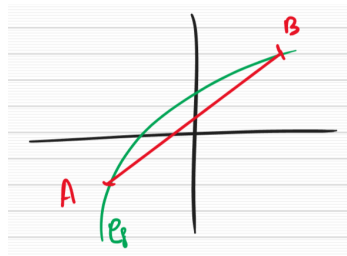
f est convexe

Si pour tous points distincts A et B de la courbe C_f , le segment $[AB]$ est au dessus de la courbe C_f entre A et B



f est convexe

Si pour tous points distincts A et B de la courbe C_f , le segment $[AB]$ est en dessous de la courbe C_f entre A et B



Propriété

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur I . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe sur I
2. C_f est située au-dessus des tangentes
3. f' est croissante sur I
4. f'' est positive sur I

Remarque

De même, f est concave sur I

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow f' \text{ est décroissante sur } I \\ &\Longleftrightarrow f'' \text{ est négative sur } I \end{aligned}$$

Exemples

1. $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$
 $f'(x) = e^x$
 $f''(x) = e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$
Donc la fonction exponentielle est convexe
2. $g(x) = \sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$
On a $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $g''(x) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{-1}{4x\sqrt{x}} < 0$
Donc la fonction racine carrée est concave sur $]0; +\infty[$

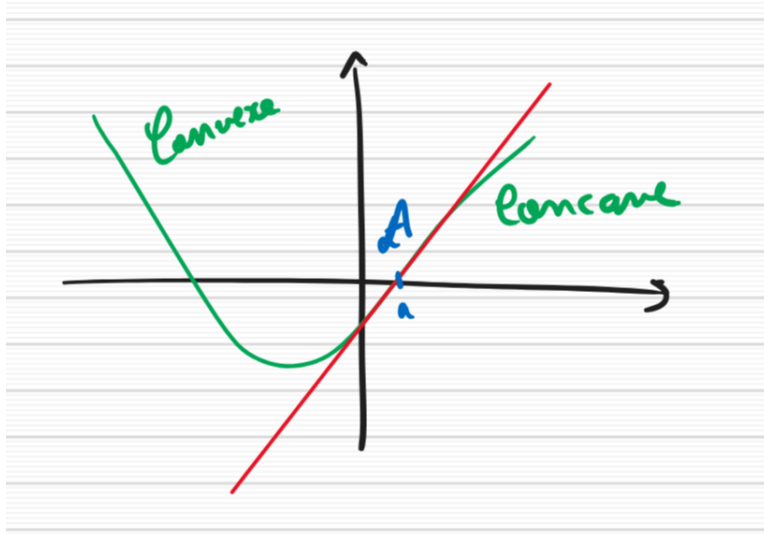
2.2 Point d'inflexion

Définition

Soit f une fonction définie et dérivable en un intervalle I . Soit A un point d'abscisse a de la courbe C_f . On dit que A est un point d'inflexion de C_f si la courbe C_f traverse la tangente en a .

Remarque

En l'abscisse a du point d'inflexion, la convexité change.



Exemple

La fonction cube $f(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ admet comme point d'inflexion O du repère

En effet, f est concave sur $] -\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty]$

Propriété

Le point A est un point d'inflexion si et seulement si f'' s'annule en a en changeant de signe.

Exemple

Dans l'exemple précédent, on a $f(x) = x^3$ donc $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

On retrouve alors le fait que l'origine O du repère est un point d'inflexion de C_f

Part VIII

Géométrie dans l'espace I

Chapter 1

Géométrie vectorielle

1.1 Vecteur de l'espace

Définition

Deux points A et B distincts de l'espace définissent un vecteur $\overrightarrow{v}$ non nul de l'espace caractérisé par sa direction qui est celle de (AB) , son sens sur cette direction et sa longueur est celle du segment $[AB]$.

Si les deux points sont confondus alors on a le vecteur nul qui n'a pas de direction $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$

Définition

La translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la transformation qui, à tout point C , associe l'unique point D tel que :
 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

Remarque

La somme de deux vecteurs, le produit d'un vecteur par un réel ainsi que la relation de Chasles restent valides tels qu'on les connaît

Exemple

Dans le cube $ABCDEFGH$, on a :

- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FG}$
- $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EC}$
- $2 \times \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HD} - \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EB}$

Définition

On dit que c'est coplanaire lorsqu'ils sont sur le même plan

Exemple

Dans le cube $ABCDEFGH$ précédent :

- Les points A, B, C, D sont coplanaires
- Les points B, C, F, G sont coplanaires
- Les points A, E, F, H sont coplanaires

Propriétés

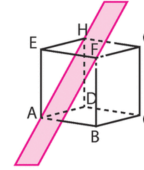
- Les vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont coplanaires $\iff$ les points O, A, B, C sont coplanaires
- 3 vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires $\iff$ il existe deux réels α et β tels que $\alpha \times \vec{u} + \beta \times \vec{v} = \vec{w}$

Définition

Un plan P est défini par un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires (donc non nuls). Le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ constituent le repère $(A; \vec{u}; \vec{v})$ du plan p de l'espace

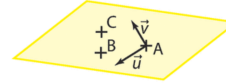
● **Exemple**

Dans le cube ABCDEFGH, le plan (AFH) est déterminé par les trois points A, F et H ou bien par le point A et les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$.



Un plan de l'espace est défini :

- soit par trois points non alignés (ABC),
- soit par un point et deux vecteurs non colinéaires $(A ; \vec{u}, \vec{v})$.



Si $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ est un repère du plan P alors pour tout point M de P , il existe un unique couple $(x; y)$ de nombres réels tels que

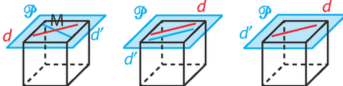
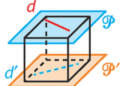
$$\overrightarrow{AM} = x \times \vec{u} + y \times \vec{v}$$

Chapter 2

Position relative

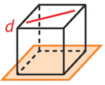
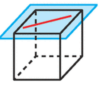
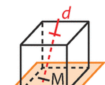
Propriété Positions relatives de deux droites

Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (c'est-à-dire incluses dans un même plan) soit non coplanaires.

d et d' sont coplanaires et sécantes en M ou strictement parallèles ou confondues	d et d' sont non coplanaires
	

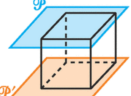
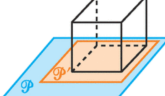
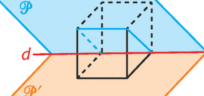
Propriété Positions relatives d'une droite et d'un plan

Soit d une droite et $\mathcal{P}$ un plan. Il existe trois configurations pour les positions relatives de d et de $\mathcal{P}$.

① d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$	② d est incluse dans $\mathcal{P}$	③ d est sécante à $\mathcal{P}$
		

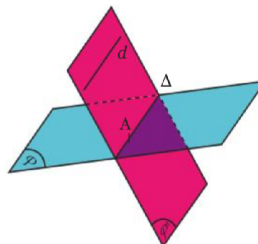
Propriété Positions relatives de deux plans

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans. Il existe trois configurations pour les positions relatives de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}'$.

① $\mathcal{P}$ est strictement parallèle à $\mathcal{P}'$	② $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus	③ $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants en d
		

Théorème

Une droite d est parallèle à un plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, il existe une droite Δ du plan $\mathcal{P}$ parallèle à d .



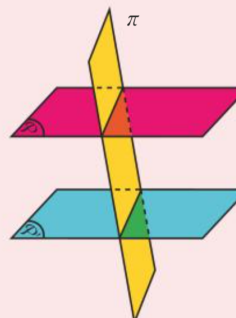
Théorème

Un plan $\mathcal{P}'$ est parallèle à un plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, il existe deux droites sécantes de $\mathcal{P}'$ parallèles à deux droites sécantes de $\mathcal{P}$.



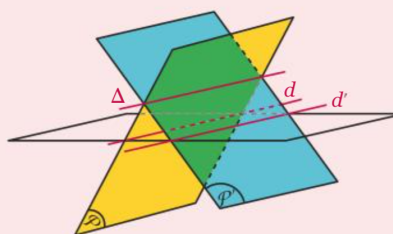
Théorème

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans strictement parallèles. Tout plan π qui coupe l'un de ces plans coupe l'autre et les droites d'intersection obtenues sont parallèles.



Théorème du toit (admis)

Soient deux droites d et d' parallèles. Soit un plan $\mathcal{P}$ contenant d sécant à un autre plan $\mathcal{P}'$ contenant d' . Alors la droite Δ intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est parallèle à d et à d' .



Chapter 3

Repère cartésien de l'espace et coordonnées

Définition

Un point O et 3 vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ non coplanaires définissent un repère cartésien de l'espace noté $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

Le triplet $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est appelé base de l'espace

Définition

Pour tout point M de l'espace, on peut écrire de manière unique $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Le triplet $(x; y; z)$ constitue les coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont notées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Exemple

Dans le cube $ABCDEFGH$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires donc $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace d'origine A . Dans ce repère, les triplets $(1; 0; 0)$; $(1; 1; 0)$; $(1; 0; 1)$; $(0; 1; 1)$ sont les coordonnées respectives des points B ; C ; F et H .

Remarques

- On note $M(x; y; z)$ si M a pour coordonnées $(x; y; z)$
- Terminologie : Si $M(x; y; z)$, on a :

x l'abscisse

y l'ordonnée

z la cote

Propriétés

- Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

- Si $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$$

et $k \times \vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$

- Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

Propriété (montrer que 3 vecteurs sont coplanaires)

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 3 vecteurs de l'espace

- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires $\iff$ l'un des vecteurs est combinaison linéaire des deux autres, c'est à dire :
il existe α et β dans $\mathbb{R}$ tels que $\vec{u} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}$
- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ pas coplanaires $\iff$ ils sont linéairement indépendants, c'est à dire :
 $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \implies a = b = c = 0$

Exemple

- Montrer que les points $E(2; 0; 1)$, $F(2; -2; 1)$, $G(5; 5; 0)$ et $H(-3; -5; 6)$ sont coplanaires

Pour cela, montrons que $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EH}$ sont coplanaires

$$\overrightarrow{EF} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 1-2 \\ -2-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} \text{ c'est à dire } \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EG} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 5-2 \\ 5-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} \text{ c'est à dire } \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EH} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} -3-2 \\ -5-0 \\ 6-1 \end{pmatrix} \text{ c'est à dire } \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Déterminons α et β tels que $\overrightarrow{EH} = \alpha \overrightarrow{EF} + \beta \overrightarrow{EG}$

$$\text{Ce qui donne } \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -5 = -\alpha + 3\beta \\ -5 = -2\alpha + 5\beta \\ 5 = -\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -10 \\ \beta = -5 \end{cases}$$

Donc $\overrightarrow{EH} = -10\overrightarrow{EF} - 5\overrightarrow{EG}$ donc $\overrightarrow{EH}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$

Conclusion : E, F, G et H sont coplanaires

- Montrer que $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires

Pour cela, montrons qu'ils sont linéairement indépendants

Supposons $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$, montrons que $a = b = c = 0$

$$\text{Ce qui donne } a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b = 0 \iff b = -a \\ a + c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + a + c = 2a + c = 0 \\ b = -a \\ a + c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a + c - (a + c) = 0 - 0 = a \iff a = 0 \\ b = -a = -0 = 0 \iff b = 0 \\ a + c = 0 = 0 + c = c \iff c = 0 \end{cases}$$

Donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants, et donc ne sont pas coplanaires

Remarque

- Coplanaire $\iff$ pas linéairement indépendants
- Non coplanaire $\iff$ pas combinaison linéaire
- 3 vecteurs linéairement indépendants dans l'espace forment une base

Chapter 4

Représentation graphique d'une droite

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

On considère une droite Δ de l'espace définie par le point A et le vecteur directeur $\vec{u}$

On a $M \in \Delta \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires $\iff \overrightarrow{AM} = t \times \vec{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Soit $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}; \vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}; M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\text{Alors } \overrightarrow{AM} = t \times \vec{u} \iff \begin{cases} x - x_A = tx_u \\ y - y_A = ty_u \\ z - z_A = tz_u \end{cases} \iff \begin{cases} x = tx_u + x_A \\ y = ty_u + y_A \\ z = tz_u + z_A \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ce dernier système est appelé représentation paramétrique de la droite Δ

Exemple

Soit $A(5; 4; -1)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

La représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 4 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Si on prend $t = 1$, on a $\begin{cases} x = 7 \\ y = 7 \\ z = 0 \end{cases}$

donc le point de coordonnées $(7; 7; 0)$ appartient à Δ

Inversement, le point de coordonnées $(1; -2; -3)$ appartient-il à Δ ?

$$\text{Résolvons } \begin{cases} 1 = 5 + 2t \\ -2 = 4 + 3t \\ -3 = -1 + t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases} \quad \text{Donc } (1; -2; -3) \in \Delta$$

De même, est-ce que $(0; 4; 1)$ appartient à Δ ?

$$\text{Résolvons } \begin{cases} 0 = 5 + 2t \\ 4 = 4 + 3t \\ 1 = -1 + t \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{-5}{2} \\ t = 0 \\ t = 2 \end{cases} \quad \text{Donc } (0; 4; 1) \notin \Delta$$

Chapter 5

Orthogonalité

Définition

Deux droites de l'espace sont orthogonales s'il existe une parallèle à la première qui est perpendiculaire à la seconde

Exemple

Dans le cube $ABCDEFGH$, les droites (AE) et (HG) sont orthogonales

car $\begin{cases} (AE) \text{ et } (DH) \text{ sont parallèles} \\ (HG) \text{ et } (DH) \text{ sont perpendiculaires} \end{cases}$

Les droites (AB) et (BC) sont orthogonales et aussi perpendiculaires

Propriété

Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une l'est aussi à l'autre

Définition

Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan

Propriétés

- Une droite est orthogonale à un plan $\iff$ elle est orthogonale à deux droites sécantes au plan (qui appartiennent à celui-ci)
- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une l'est à l'autre
- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles

Part IX

Géométrie dans l'espace II

Chapter 1

Produit scalaire

1.1 Définition et propriété

Définition

Un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est orthonormal si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ et si $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux

Exemple

Dans un cube $ABCDEFGH$, le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est orthonormal

Remarque

On rappelle que les droites dans l'espace sont :

- Perpendiculaires si elles sont coplanaires
- Orthogonales si elles ne sont pas coplanaires

Par contre, on ne dit pas que des vecteurs sont orthogonaux

Définition

L'expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormal de l'espace est donnée par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \text{ avec } \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Remarque

Autres expressions du produit scalaire :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$ ou $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)

Exemple

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 0 + (-1) \times 3 + 4 \times (-5) = -3 - 16 = -23$$

Propriété

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Exemple

Les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux car

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 1 \times 3 + (-3) \times (-1) + 6 \times (-1) = 3 + 3 - 6 = 0$$

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
- $(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab \times \vec{u} \cdot \vec{v}$
- S'ils sont colinéaires et $\begin{cases} \text{de même sens, } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \\ \text{de sens opposé, } \vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \end{cases}$

1.2 Norme d'un vecteur et carré scalaire

Définition

On pose $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$

Dans un repère orthonormal, cela donne pour $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Exemple

Si $\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ alors : $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$

Donc la longueur AB est égale à $\sqrt{35}$

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace :

- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Conséquence : voici deux autres formules pour $\vec{u} \cdot \vec{v}$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

Chapter 2

Équation cartésienne de plan

Théorème

Soit P le plan contenant le point A et de vecteur normal $\vec{n}$. On peut définir le plan P comme l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$



On pose alors $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Pour

tout point $M(x; y; z)$ du plan P , on a :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$\iff ax - ax_A + by - by_A + cz - cz_A = 0$$

$$\iff ax + by + cz - (ax_A - by_A - cz_A) = 0$$

On pose alors $d = -(ax_A - by_A - cz_A)$ et on obtient le théorème suivant :

Théorème

Tout plan de l'espace admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où les coefficients a, b, c et d ne sont pas tous nuls

Cette équation est appelée équation cartésienne du plan. Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est alors un vecteur normal au plan

Exemples

Déterminons une équation cartésienne du plan passant par $A(-1; 3; 2)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

On sait, à l'aide du vecteur normal, qu'une équation cartésienne du plan est de la forme $2x + 5y + 8z + d = 0$

Comme A appartient au plan, ses coordonnées vérifient l'équation précédente : $2 \times (-1) + 5 \times 3 + 8 \times 2 + d = 0 \iff d = -29$

Une équation du plan est donc $2x + 5y + 8z - 29 = 0$

Chapter 3

Projeté orthogonal

Exemple

Calculer les coordonnées du projeté orthogonal H du point $A(7;0;4)$ sur le plan (P) d'équation $2x - y + 3z + 2 = 0$

La droite d orthogonale à (P) qui passe par A a pour vecteur directeur un

vecteur normal à (P) , donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

d a alors pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t + 7 \\ y = -t \\ z = 3t + 4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Les coordonnées de H vérifient le système de la droite d et du plan (P)

$$\begin{cases} x = 2t + 7 \\ y = -t \\ z = 3t + 4 \\ 2x - y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne $2(2t+7) - (-t) + 3(3t+4) + 2 = 0 \iff 14t + 28 = 0 \iff t = -2$

En remplaçant t , on obtient $H(3; 2; -2)$

La distance de A au plan (P) est :

$$AH = \left\| \overrightarrow{AH} \right\| = \sqrt{(3-7)^2 + (2-0)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

Part X

Primitives et équations différentielles

Chapter 1

Primitives

1.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x) = \forall x \in I$

Exemple

- $f(x) = 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$
On pose $F(x) = x^2 + x$ sur $\mathbb{R}$
On a bien $F'(x) = 2x + 1 = f(x)$ donc F est une primitive de f
- $g(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$ sur $]1; +\infty[$
On pose $G(x) = \frac{-3}{x-1}$ sur $]1; +\infty[$
On a bien $G'(x) = -3 \times \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{3}{(x-1)^2} = g(x)$
 G est donc une primitive de g

1.2 Propriétés

1.2.1 Existence de primitives

Théorème

Toute fonction dérivable en I admet des primitives

1.2.2 Ensemble des primitives d'une fonction donnée

Théorème

Si F est une primitive de f sur I , alors toutes les primitives de f sur I s'écrivent sous la forme $F + k$ où k est une constante

Exemple

Dans l'exemple précédent, les fonctions $F_1(x) = x^2 + x + 1$
 $F_2(x) = x^2 + x - 479$; $F_3(x) = x^2 + x + \pi$ sont des primitives de f

1.2.3 Primitive liée à une condition

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur I et $x_0 \in I$

Alors il existe une unique primitive de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$ avec $y_0 \in \mathbb{R}$

Exemple

Déterminons la primitive F de $f(x) = 3x^2 - x - 1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 2$

On a $F(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} - x + k$ et $F(1) = 2 \implies F(1) = 1^3 - \frac{1^2}{2} - 1 + k = 2$

$\iff \frac{-1}{2} + k = 2 \iff k = 2,5$

Donc $F(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} - x + 2,5$

1.3 Primitives de fonctions usuelles

Fonction	Une primitive	Fonction	Une primitive
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$	$u'u^n$ $n \neq -1$ entier	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$
$f(x) = x^n$ $n \geq 0$ entier	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$f(x) = x^n$ $n < -1$ entier	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\frac{u'}{u}$	$\ln u$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$u'e^u$	e^u
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$		
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$		

⚠ Bien adapter le coefficient lorsque cela est nécessaire pour une forme donnée

Polynôme : $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$, alors $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - x$

Forme $u'u^n$: $f(x) = 2x(x^2 - 1)^3$, alors $F(x) = \frac{(x^2 - 1)^4}{4}$

$f(x) = (3x - 1)^4 = \frac{1}{3} [3(3x - 1)^4]$, alors $F(x) = \frac{1}{3} \frac{(3x - 1)^5}{5} = \frac{(3x - 1)^5}{15}$

Forme $\frac{u'}{u}$: $f(x) = \frac{2}{2x - 3}$, alors $F(x) = \ln |2x - 3|$

$f(x) = \frac{1}{4x + 1} = \frac{1}{4} \left[\frac{4}{4x + 1} \right]$, alors $F(x) = \frac{1}{4} \ln |4x + 1|$

Forme $\frac{u'}{u^n}$: $n \geq 2$, $f(x) = \frac{x + 1}{(x^2 + 2x - 3)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{2x + 2}{(x^2 + 2x - 3)^2} \right]$, alors

$$F(x) = \frac{-1}{2(x^2 + 2x - 3)}$$

Forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 4}}$ alors $F(x) = 2\sqrt{x + 4}$

$f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x + 1}} = \frac{3}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{2x + 1}} \right]$, alors $F(x) = \frac{3}{2} \times 2\sqrt{2x + 1} = 3\sqrt{2x + 1}$

Forme $u'e^u$: $f(x) = e^{4x+1} = \frac{1}{4} [4e^{4x+1}]$, alors $F(x) = \frac{1}{4} e^{4x+1}$

$f(x) = xe^{-x^2+3} = -\frac{1}{2} [-2xe^{-x^2+3}]$, alors $F(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2+3}$

Chapter 2

Équation différentielle (ED)

2.1 Généralités

Définition

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction y de variable x

L'équation relie y avec certaines de ses dérivées et éventuellement x

Exemple

$y' = 2y + 3$ ou $y' = 4x$ sont des équations différentielles d'ordre 1 (car il y a la dérivée première). On a $y'' + y = 5$ est une ED d'ordre 2 (dérivée seconde).

Résoudre $y' = 2y + 3$ revient à trouver une fonction dérivable y telle que pour tout x d'un intervalle I , on ait $y'(x) = 2y(x) + 3$

Remarque

Une ED a été vue en première, la fonction exponentielle est la solution de l'ED : $y' = y$ avec $y(0) = 1$

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . L'équation $y' = f$ admet comme solution une primitive de f

Exemple

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'ED $y' = 2x$

2.2 Résolution de l'ED $y' = ay$

Théorème

Les solutions de l'ED $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Quel que soit le couple de réels $(x_0; y_0)$, l'ED $y' = ay$ admet une unique solution f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la "condition initiale" $f(x_0) = y_0$

Exemple

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'ED $y' = -3y$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-3x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

La seule solution vérifiant $f(1) = 2$ est $f : x \mapsto 2e^3e^{-3x}$ car $f(1) = 2 \iff Ce^{-3} = 2 \iff C = 2e^3$

2.3 Résolution de l'ED $y' = ay + b$

Théorème

Les solutions de l'ED $y' = ay + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a} & \text{avec } C \in \mathbb{R} & \text{si } a \neq 0 \\ y(x) = bx + k & & \text{sinon} \end{cases}$$

2.3.1 Exemple

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 6y + 5$ sont les fonctions telles que $y = Ce^{6x} - \frac{5}{6}$ avec $C \in \mathbb{R}$

La seule solution f vérifiant $f(0) = 2$ est $f : x \mapsto \frac{17}{6}e^{6x} - \frac{5}{6}$

2.4 Résolution de l'ED $y' = ay + f$

Théorème

Soit f une fonction continue sur I

Pour résoudre une ED de la forme $y' = ay + f$:

1. Cherche une solution particulière y_0 (souvent donnée)
2. Déterminer l'ensemble des solutions y_1 de l'équation dite homogène $y' = ay$

L'ED $y' = ay + f$ admet alors comme solutions $y_0 + y_1$

Exemple

- Résolvons l'ED $y' = 2y + 1 - 6x$ qui est bien de la forme $y' = ay + f$ avec $a = 2$ et $f : x \mapsto 1 - 6x$

1. Une solution particulière est $y_0 = 3x + 1$
En effet, $y'_0 = 3$ et $2y_0 + 1 - 6x = 2(3x + 1) + 1 - 6x = 3$ donc $y'_0 = 2y_0 + 1 - 6x$
2. On a l'équation homogène $y' = 2y \iff y = Ce^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Conclusion : Les solutions de l'ED $y' = 2y + 1 - 6x$ sont $y = y_0 + y_1 = Ce^{2x} + 3x + 1$ avec $C \in \mathbb{R}$

- On considère l'ED $y' = y - x^2$ qui est de la forme $y' = ay + f$ avec $a = 1$ et $f : x \mapsto -x^2$

1. Montrer que l'ED admet une solution particulière
Un polynôme du 2nd degré $y_0 = ax^2 + bx + c$
On a alors $y'_0 = y_0 - x^2 \iff 2ax + b = ax^2 + bx + c - x^2$
 $\iff 2ax + b = (a - 1)x^2 + bx + c$
 $\iff \begin{cases} 0 = a - 1 \\ 2a = b \\ b = c \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$

D'où $y_0 = x^2 + 2x + 2$

2. L'équation homogène $y' = y$ admet comme solution $y = Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$

Conclusion : Les solutions de l'équation différentielle sont $y = y_0 + y_1 = Ce^x + x^2 + 2x + 2$