

Cours de Maths Expertes

Enzo Rodriguez

November 22, 2024

Contents

I	Nombres complexes - Calculs algébriques - polynomes	3
1	Ensemble des nombres complexes	4
1.1	Définition-Théorème : Ensemble des nombres complexes . . .	4
1.2	Exemples	4
1.3	Methode	5
1.4	Propriété : Égalité dans $\mathbb{C}$	5
1.5	Méthode	5
2	Opérations dans $\mathbb{C}$	6
2.1	Définition : Addition dans $\mathbb{C}$	6
2.2	Définition : Multiplication dans $\mathbb{C}$	6
2.3	Définition/Théorème : Inverse d'un nombre complexe - Quo- tient de deux nombres complexes	7
3	Conjugué d'un nombre complexe	9
3.1	Définition	9
3.2	Théorème : Propriétés du conjugué	9
3.3	Démonstration	10
3.4	Théorème : Opérations sur les conjugués	11
3.5	Démonstration	11
4	Formule du binôme de Newton et équations du 2nd degré à coefficients réels	12
4.1	Formule du binôme de Newton	12
4.2	Équations du second degré à coefficients réels	16
5	Factorisation et racine d'un polynôme	20

II	Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ - Congruences	24
1	Généralités	25
2	Relation de divisibilité	26
2.1	Définition : divisibilité, diviseur, multiple	26

Part I

Nombres complexes - Calculs algébriques - polynomes

Chapter 1

Ensemble des nombres complexes

1.1 Définition-Théorème : Ensemble des nombres complexes

- Il existe un ensemble de nombres notés $\mathbb{C}$ et appelé "ensemble des nombres complexes". Cet ensemble contient $\mathbb{R}$ et un certain élément i pour lequel : $i^2 = -1$. Tout nombre complexe s'écrit **de façon unique** sous la **forme algébrique** : $z = a + b \times i$, où a et b sont des réels.
- a est la **partie réelle** de z et est noté : $Re(z) = a$
- b est la **partie imaginaire** de z et est noté : $Im(z) = b$
- Les réels sont exactement les nombres complexes de partie imaginaire nulle.
- Les imaginaires purs sont exactement les nombres complexes de partie réelle nulle

1.2 Exemples

- $\sqrt{2} \in \mathbb{C}$ et est un réel
- $3 + 2i \in \mathbb{C}$
- $\sqrt{3}i \in \mathbb{C}$ et est un imaginaire pur

1.3 Methode

1.3.1 Déterminer la forme algébrique de

$$z = \sqrt{2} + i\sqrt{5} - 3i^2 + 2i - 7$$

$$z = \sqrt{2} + i\sqrt{5} - 3i^2 + 2i - 7$$

$$z = \sqrt{2} + \sqrt{5}i - 3 \times (-1) + 2i - 7$$

$$z = \sqrt{2} + 3 - 7 + \sqrt{5}i + 2i$$

$$z = (\sqrt{2} + 3 - 7) + (\sqrt{5} + 2)i$$

1.3.2 Déterminer la forme algébrique de

$$z = -i^5 + 3i - 5\sqrt{2} + 4i^{2024}$$

$$z = -i^5 + 3i - 5\sqrt{2} + 4i^{2024}$$

$$z = -i + 3i - 5\sqrt{2} + 4 \times 1$$

$$z = -5\sqrt{2} + 4 - i + 3i$$

$$z = -5\sqrt{2} + 4 + 2i$$

1.4 Propriété : Égalité dans $\mathbb{C}$

Soit $z, z' \in \mathbb{C}; z = a + bi; z' = a' + b'i$

$$\text{Alors } z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

1.5 Méthode

Résoudre : $x - ix - 2y + iy = 5(1 - 2i)$

$$x - ix - 2y + iy = 5(1 - 2i) \Leftrightarrow (x - 2y) + (-x + y)i = 5 - 10i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 5 \\ (-x + y)i = -10i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 5 & (a) \\ -x + y = -10 & (b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - x + y = 5 - 10 & (a + b) \\ x - 2y + (-2x + 2y) = -5 - 20 & (a + 2b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 15 \end{cases}$$

Chapter 2

Opérations dans $\mathbb{C}$

2.1 Définition : Addition dans $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ est muni de l'opération d'addition qui généralise celle qu'on connaît dans $\mathbb{R}$.

Soient $z; z' \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\text{On a : } Re(z + z') &= Re(z) + Re(z') \\ Im(z + z') &= Im(z) + Im(z')\end{aligned}$$

2.2 Définition : Multiplication dans $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ est muni de l'opération de multiplication qui généralise celle qu'on connaît dans $\mathbb{R}$.

Soient $z; z' \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\text{On a : } Re(zz') &= Re(z) * Re(z') - Im(z) * Im(z') \\ Im(zz') &= Re(z) * Im(z') + Im(z) * Re(z')\end{aligned}$$

2.2.1 Remarque

$$\begin{aligned}\text{En général } Re(zz') &\neq Re(z) * Re(z') \\ Im(zz') &\neq Im(z) * Im(z')\end{aligned}$$

2.2.2 Remarque

Le conjugué de $z = a + bi$ est le nombre complexe noté $\bar{z} = a - bi$

$$\begin{aligned}\text{On a donc : } z\bar{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ z\bar{z} &= a^2 - abi + abi - (bi)^2 \\ z\bar{z} &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

2.2.3 Exercice

$$\begin{aligned}z &= a + bi \quad ; \quad z' = a' + b'i \\ zz' &= (a + bi)(a' + b'i) \\ zz' &= aa' + ab'i + a'b'i + bb'i^2 \\ zz' &= (aa' - bb') + i(ab' + ba')\end{aligned}$$

2.2.4 Exercice

$$\begin{aligned}z &= 4 - 5i \quad ; \quad z' = -2 + 4i \\ zz' &= (4 - 5i)(-2 + 4i) \\ zz' &= -8 + 16i - (-10i) - (20i^2) \\ zz' &= -8 + 16i + 10i + 20 \\ zz' &= 12 + 26i\end{aligned}$$

2.3 Définition/Théorème : Inverse d'un nombre complexe - Quotient de deux nombres complexes

- Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $z = x + yi$; $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$ ou $y \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

- Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ avec $z' \neq 0$

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$$

Exemple

Soit $z = 4 - 5i$ et $z' = -2 + 4i$

$$\frac{1}{z'} = \frac{\overline{z'}}{z' \overline{z'}} = \frac{-2 - 4i}{(-2)^2 + (-4)^2} = \frac{-2 - 4i}{20} = \frac{-1}{10} - \frac{1}{5}i$$

$$\frac{z}{z'} = (4 - 5i) \left(\frac{-1}{10} - \frac{1}{5}i \right) = \frac{-4}{10} - \frac{4}{5}i + \frac{5}{10}i - 1 = \frac{-7}{10} - \frac{3}{10}i$$

Exemple

$$\frac{1 - 2i}{3 + 4i} = \frac{(1 - 2i)(3 - 4i)}{(3)^2 + (-4)^2} = \frac{3 - 4i - 6i - 8}{25} = \frac{-1}{5} - \frac{2}{5}i$$

Chapter 3

Conjugué d'un nombre complexe

3.1 Définition

Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$; $a, b \in \mathbb{R}$

On appelle conjugué de z , on le note $\bar{z}$ et on a : $\bar{z} = a - bi$

3.2 Théorème : Propriétés du conjugué

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

1. $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
2. $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
3. $\overline{\bar{z}} = z$
4. $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
5. $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$
6. Si $z = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$

3.3 Démonstration

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $z = a + bi$; $\bar{z} = a - bi$; $a, b \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Re}(z) = a$$

$$\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{a+bi+a-bi}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

Donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $z = a + bi$; $\bar{z} = a - bi$; $a, b \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Im}(z) = b$$

$$\frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{a+bi-a-bi}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b$$

Donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $z = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$

$$\text{On a } \bar{z} = a - bi$$

$$\text{On a donc } \overline{\bar{z}} = \overline{a - bi} = a - (-bi) = a + bi$$

Donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{\bar{z}} = z$

4. On a $z \in \mathbb{R}$

$$\iff bi = 0$$

$$\iff 2bi = 0$$

$$\iff a + 2bi = a + 0$$

$$\iff a + bi = a - bi$$

$$\iff z = \bar{z}$$

Donc pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$

5. On a $z \in i\mathbb{R}$

$$\iff a = 0$$

$$\iff 2a = 0$$

$$\iff 2a - ib = 0 - ib$$

$$\iff a - ib = -a - ib$$

$$\iff a - ib = -(a + ib)$$

$$\iff \bar{z} = -z$$

$$\iff z = -\bar{z}$$

Donc pour tout $z \in i\mathbb{R}$, on a $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$

6. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $z = a + bi$; $\bar{z} = a - bi$; $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{On a } z \times \bar{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 - abi + abi + b^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Donc si $z = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$

3.4 Théorème : Opérations sur les conjugués

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

1. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
2. $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
3. Si $z \neq 0$, on a : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

3.5 Démonstration

1. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ avec $z = a + bi, z' = a' + b'i$ avec $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \overline{z + z'} &= \overline{(a + bi) + (a' + b'i)} \\ &= \overline{a + a' + (b + b')i} \\ &= a + a' - (b + b')i \\ \bar{z} + \bar{z'} &= (a - bi) + (a' - b'i) \\ &= a + a' - bi - b'i = a + a' - (b + b')i \end{aligned}$$

Donc pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$

2. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ avec $z = a + bi, z' = a' + b'i$ avec $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \overline{z \times z'} &= \overline{(a + bi)(a' + b'i)} \\ &= \overline{aa' - bb' + (ab' + a'b)i} \\ &= aa' - bb' - (ab' + a'b)i \\ \bar{z} \times \bar{z'} &= (a - bi) \times (a' - b'i) \\ &= aa' - ab'i - a'bi - bb' \\ &= aa' - bb' - (ab' + a'b)i \end{aligned}$$

Donc pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

Chapter 4

Formule du binôme de Newton et équations du 2nd degré à coefficients réels

4.1 Formule du binôme de Newton

4.1.1 Notations

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{2n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (2n)^2$$

4.1.2 Anagrammes dans un alphabet à deux lettres - Coefficients binômiaux

Nous nous intéresserons ici aux anagrammes mathématiques écrits avec k lettres "s" et $(n - k)$ lettres "E"

Exemple

- Écrire les anagrammes de SSE :
$$3 \left\{ \begin{array}{l} \text{SSE} \\ \text{SES} \\ \text{ESS} \end{array} \right.$$
- Écrire les anagrammes de SSEE :
$$6 \left\{ \begin{array}{l} \text{SSEE} \\ \text{SESE} \\ \text{SEES} \\ \text{ESSE} \\ \text{ESES} \\ \text{EESS} \end{array} \right.$$

Définition

On note $\binom{n}{k}$ appelé **coefficient binomial** et qu'on lit "**k parmi n**" le nombre d'anagrammes du mot $\underbrace{S \dots S}_k \underbrace{E \dots E}_{n-k}$

Exemple

On note $\binom{4}{2} = 6$ (ex. précédent)

Propriétés des coefficients binomiaux

1. Si $k > n$ alors $\binom{n}{k} = 0$
2. Par convention : $\binom{0}{0} = 1$
3. $\binom{n}{0} = 1$
4. $\binom{n}{1} = n$
5. $\binom{n}{n} = 1$
6. $\binom{n}{n-1} = n$

Formule de la symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Formule de Pascal : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$

Démonstration de la formule de Pascal

- Il y a $\binom{n+1}{k+1}$ arrangements de $\underbrace{S \dots S}_{k+1} \underbrace{E \dots E}_{(n+1)-(k+1)=n-k}$
- Pour former les anagrammes de $S \dots SE \dots E$, il y a 2 possibilités avec le raisonnement suivant :

Soit on le fait commencer par S : il doit être suivi d'un mot de la forme $\underbrace{S \dots S}_k \underbrace{E \dots E}_{n-k}$, il y en a donc $\binom{n}{k}$

Soit on le fait commencer par E : il doit être suivi d'un mot de la forme $\underbrace{S \dots S}_{k+1} \underbrace{E \dots E}_{n-k-1}$, il y en a donc $\binom{n}{k+1}$

- Donc le nombre total d'anagrammes est $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

n/k	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

$$(x+y)^3 = (y+x)^3 = (y+x)(y+x)(y+x)$$

$$(x+y)^3 = (y+x)(yy+yx+xy+xx)$$

$$(x+y)^3 = yyy + yyx + yxy + yxx + xyy + xyx + xxy + xxx$$

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}y^3 + \binom{3}{0}y^2x + \binom{3}{0}yx^2 + \binom{3}{0}x^3$$

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}y^{3-0}x^0 + \binom{3}{0}y^{3-1}x^1 + \binom{3}{0}y^{3-2}x^2 + \binom{3}{0}y^{3-3}x^3$$

$$(x+y)^3 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} y^{3-k} x^k$$

On généralise :

Formule du binôme de Newton

Soient $x, y \in \mathbb{C}$

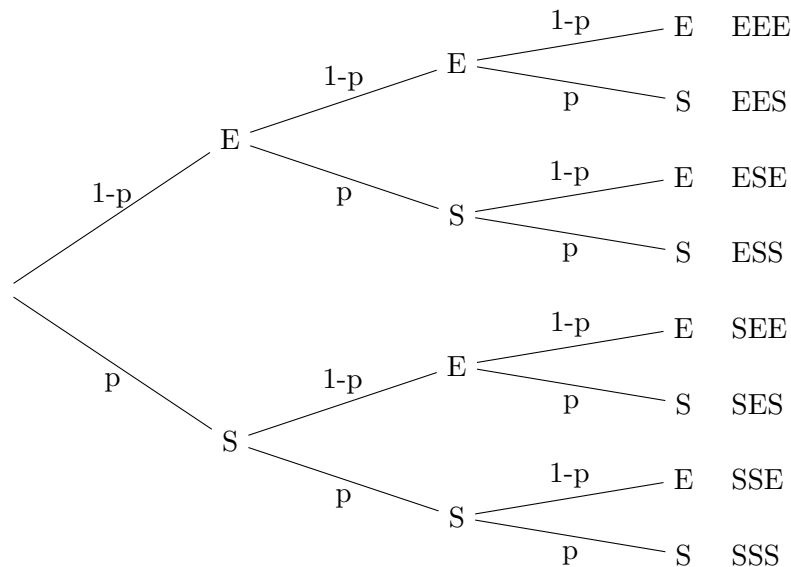
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^{n-k} x^k$$

Remarque

On représente avec un arbre une expérience aléatoire à 2 issues, répétée 3 fois dans des conditions identiques et indépendantes.

Une des 2 issues est appelée succès et notée "S", l'autre est appelée échec et notée "E".



On généralise :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k (1 - p)^{n-k}$$

Remarque

On a un sac avec 10 balles numérotées de B_1 à B_{10}

Je peux associer à ce tirage de façon **bijjective** un mot de 10 lettres

Je tire 4 boules au hasard, déterminer N_4 le nombre de tirages possibles.

Tirage	Mot associé
B_2, B_4, B_7, B_9	<u>E</u> <u>S</u> <u>E</u> <u>S</u> <u>E</u> <u>E</u> <u>S</u> <u>E</u> <u>S</u> <u>E</u>

$$N_4 = \binom{10}{4} = 210$$

4.2 Équations du second degré à coefficients réels

4.2.1 Exercice : Résoudre $z^2 = -5$

$$z^2 = -5$$

$$\iff z^2 = i^2 \times \sqrt{5}^2$$

$$\iff z^2 - i^2 \times \sqrt{5}^2 = 0$$

$$\iff (z - i\sqrt{5})(z + i\sqrt{5}) = 0$$

$$\implies \text{Produit nul : } (z - i\sqrt{5}) = 0 \text{ ou } (z + i\sqrt{5}) = 0$$

$$\iff z = i\sqrt{5} \text{ ou } z = -i\sqrt{5}$$

4.2.2 Propriétés : Racines carrées de $\mathbb{C}$ d'un nombre **réel**

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'équation $z^2 = x$ d'inconnue z possède exactement **deux** solutions opposées : z_1 et z_2

- Si $x > 0$: $z_1 = -\sqrt{x}$; $z_2 = +\sqrt{x}$
- Si $x < 0$: $z_1 = -\sqrt{-x}$; $z_2 = +\sqrt{-x}$
- Si $x = 0$: $z = 0$

4.2.3 Démonstration

- Si $x > 0$ alors :
 $z^2 = x \iff z^2 = (\sqrt{x})^2$
 $\iff z^2 - (\sqrt{x})^2 = 0$
 $\iff (z + \sqrt{x})(z - \sqrt{x}) = 0$
 $\iff z = -\sqrt{x} \text{ ou } z = +\sqrt{x}$
- Si $x < 0$ alors :
 $z^2 = x \iff z^2 = i^2(\sqrt{-x})^2$
 $\iff z^2 - (i\sqrt{-x})^2 = 0$
 $\iff (z + i\sqrt{-x})(z - i\sqrt{-x}) = 0$
 $\iff z = -i\sqrt{-x} \text{ ou } z = +i\sqrt{-x}$

4.2.4 Propriété : Résultat dans $\mathbb{C}$ d'une équation du 2nd degré à coefficients réels

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$

Soit l'inéquation : $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$

On a :

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet unique solution :

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

4.2.5 Démonstration

$$az^2 + bz + c = 0 \iff a(z^2 + \frac{bz}{z} + \frac{c}{a}) = 0$$

$$\underbrace{\iff}_{a \neq 0} z^2 + \frac{bz}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\iff (z + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\iff (z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = 0$$

$$\iff (z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

On appellera $b^2 - 4ac = \Delta$

- Si $\Delta > 0$:

$$\iff \left(z + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right) \left(z + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right) = 0$$

$$\iff \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$\iff z + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ ou } z + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$\iff z = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ ou } z = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

- Si $\Delta < 0$:

$$\iff \left(z + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{i^2 \times -\Delta}{4a^2}}\right) \left(z + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{i^2 \times -\Delta}{4a^2}}\right) = 0$$

$$\iff \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$\iff z + \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 0 \text{ ou } z + \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 0$$

$$\iff z = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 0 \text{ ou } z = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 0$$

- Si $\Delta = 0$:

$$\iff \left(z + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{0}{4a^2}}\right) \left(z + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{0}{4a^2}}\right) = 0$$

$$\iff \left(z + \frac{b}{2a}\right) \left(z + \frac{b}{2a}\right) = 0$$

$$\iff \left(z + \frac{b}{2a}\right) = 0$$

$$\iff z = \frac{-b}{2a}$$

4.2.6 Résoudre dans $\mathbb{C}$

1. $9z^2 - 6z + 5 = 0$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 5 = 36 - 180 = -144$$

$\Delta < 0$ donc on a 2 solutions dans $\mathbb{C}$

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \iff z_1 = \frac{6 - i\sqrt{144}}{2 \times 9} = \frac{6 - 12i}{18} = \frac{1}{3} - \frac{2i}{3}$$

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \iff z_1 = \frac{6 + i\sqrt{144}}{2 \times 9} = \frac{6 + 12i}{18} = \frac{1}{3} + \frac{2i}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{3} - \frac{2i}{3}; \frac{1}{3} + \frac{2i}{3} \right\}$$

2. $z = 2 - \frac{2}{z}$

$$\iff z^2 = 2z - 2$$

$$\iff z^2 - 2z + 2 = 0$$

On calcule le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 4 - 8 = -4$$

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \iff z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{4}}{2 \times (-1)} = \frac{-2 - 2i}{-2} = 1 + i$$

$$z_2 = \overline{z_1} = \overline{1 + i} = 1 - i$$

Chapter 5

Factorisation et racine d'un polynôme

Définition : polynôme de degré n à coefficients réels et à une indéterminée (notée X)

Soit $n \in \mathbb{N}$:

Un polynôme P de degré n à coefficients réels est un objet mathématique qui s'écrit sous la forme : $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + a_{n-2} X^{n-2} + \dots + a_1 X + a_0$ avec $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $a_n \neq 0$

On note $\deg(P) = n$ et a_n est appelé coefficient dominant de P

Exemple : $P(X) = X^3 - 2X + 1$

On a $\deg(P) = 3$

- X peut être un réel; $P(3) = 3^3 - 2 \times 3 + 1 = 27 - 6 + 1 = 22$
 P est évalué dans $\mathbb{R}$
- X peut être un complexe; $P(i) = i^3 - 2i + 1 = -i - 2i + 1 = 1 - 3i$
 P est évalué dans $\mathbb{C}$
- X peut être une fonction
 $P(\exp)$ va être la fonction $x \rightarrow e^{3x} - 2e^x + 1$
- X peut être une matrice; $P\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3 - 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Propriété : factorisation de $z^n - a^n$ par $z - a$

Soit $a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^*$

Il existe un polynôme Q_{n-1} de degré $n-1$ tel que pour tout nombre complexe z , on a $z^n - a^n = (z - a)Q_{n-1}$

Exercice : Factoriser $z^3 - 27i^3$ par $(z - 3i)$

$$\begin{aligned} z^3 - (27i^3) &= z^3 - (3i)^3 = (z - 3i)Q_2 \\ \iff (z - 3i)(az^2 + bz + c) &= az^3 + bz^2 + cz - 3aiz^2 - 3biz - 3ci \\ \iff az^3 + bz^2 - 3aiz^2 + cz - 3biz - 3ci & \end{aligned}$$

Identification des coefficients

$$\begin{aligned} \iff \begin{cases} a = 1 & \text{Pour } z^3 \\ b - 3ai = 0 & \text{Pour } z^2 \\ c - 3bi = 0 & \text{Pour } z^1 \\ -3ci = -27i^3 & \text{Pour } z^0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} a = 1 & \text{Pour } z^3 \\ b = 3ai \iff b = 3i & \text{Pour } z^2 \\ c = 3bi \iff c = 3i \times 3i = (3i)^2 = -9 & \text{Pour } z^1 \\ 3c = 27i^2 \iff c = -9 & \text{Pour } z^0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 3i \\ c = -9 \end{cases} \\ \iff z^3 - 27i^3 = (z - 3i)(z^2 + 3iz - 9) \end{aligned}$$

Propriété : Factorisation d'un polynôme

Soit P un polynôme évalué en $\mathbb{C}$ et de degré n ($n > 0$)

Soit $a \in \mathbb{C}$

On a : a est racine de P

$$\iff P(a) = 0$$

$$\text{Pour tout } z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - a) \times Q_{n-1}(z)$$

Démonstration de la dernière propriété

(Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - a) \times Q_{n-1}(z)$)

$\Leftarrow$: On suppose que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - a) \times Q_{n-1}(z)$

Si l'on utilise la racine a de P , on a : $P(a) = (a - a) \times Q_{n-1}(a) = 0$

Donc la propriété est valide dans ce sens

$\Rightarrow$: $P(a) = 0$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$

avec $c_n \neq 0$

$P(a) = c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \dots + c_1 a + c_0$

$P(z) - P(a) = c_n(z^n - a^n) + c_{n-1}(z^{n-1} - a^{n-1}) + \dots + c_1(z - a)$

Propriété du cours : $P(z) - P(a) = c_n(z-a)Q_{n-1} + c_{n-1}(z-a)Q_{n-2} + \dots + c_1(z-a)$

La propriété est vraie dans les 2 sens, donc on a :

$$P(z) = (z - a) \underbrace{(c_n Q_{n-1} + c_{n-1} Q_{n-2} + \dots + c_2 Q_1 + c_1)}_{\text{Polynôme de degré } n-1 = Q_{n-1}}$$

$$P(z) = (z - a)Q_{n-1}(z)$$

Exercice : $9z^3 + 12z^2 - 7z + 10$

1. Vérifier que -2 est racine de P
2. En déduire une factorisation de P
3. En déduire toutes les racines de P
4. Factoriser $P(z)$ sous la forme : $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$

Résolution

1. $P(-2) = 9(-2)^3 + 12(-2)^2 - 7(-2) + 10$
 $P(-2) = -72 + 48 + 14 + 10 = 0$
Donc -2 est bien une racine de P
2. $P(z) = (z + 2)Q_2(z) = (z + 2)(az^2 + bz + c)$
 $\Leftrightarrow 9z^3 + 12z^2 - 7z + 10 = az^3 + bz^2 + cz + 2az^2 + 2bz + 2c$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b + 2a = 12 \Leftrightarrow b + 18 = 12 \Leftrightarrow b = -6 \\ c + 2b = -7 \Leftrightarrow c - 12 = -7 \Leftrightarrow c = 5 \\ 2c = 10 \Leftrightarrow c = 5 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow P(z) = (z + 2)(9z^2 - 6z + 5)$

3. On veut résoudre $9z^2 - 6z + 5 = 0$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac \iff (-6)^2 - 4 \times 9 \times 5 = 36 - 180 = -144$$

$-144 < 0$ donc il y a deux solutions dans $\mathbb{C}$

$$z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \iff z_2 = \frac{6 - i\sqrt{144}}{2 \times 9} = \frac{6 - 12i}{18} = \frac{1}{3} + \frac{2i}{3}$$

$$z_3 = \overline{z_2} = \overline{\left(\frac{1}{3} + \frac{2i}{3}\right)} = \frac{1}{3} - \frac{2i}{3}$$

4. $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$

$$\iff P(z) = 9(z + 2) \left(z - \frac{1}{3} + \frac{2i}{3}\right) \left(z - \frac{1}{3} - \frac{2i}{3}\right)$$

Part II

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ - Congruences

Chapter 1

Généralités

- Ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = 0, 1, 2, \dots$
- Ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
- Une fraction : $\frac{a \rightarrow \text{numérateur} \in \mathbb{Z}}{b \rightarrow \text{dénominateur} \in \mathbb{N}}$

Chapter 2

Relation de divisibilité

2.1 Définition : divisibilité, diviseur, multiple

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$

On dit que :

- a **divise** b
- a **est un diviseur de** b
- b **est un multiple de** a
- b **est divisible par** a

S'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $a \times k = b$

Cette relation se note : $a|b$ "a divise b"